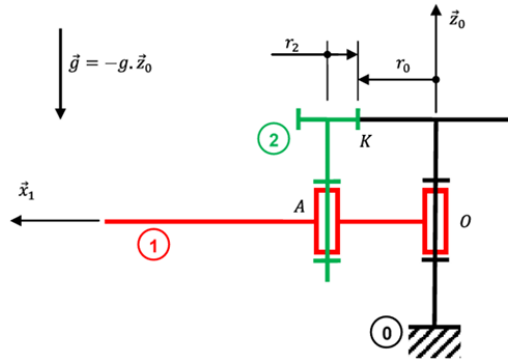




1 Mise en situation

La figure ci-dessous représente le schéma cinématique de la motorisation d'un bras de robot.



On note $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le repère galiléen lié au bâti **0**.

On note $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ le repère lié au bras **1**. Le bras **1** est en liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_0)$ avec le bâti **0**. La position angulaire du bras **1** par rapport au bâti **0** est notée : $\theta_{1/0} = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.

On note $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ le repère lié au pignon moteur **2**. Le pignon moteur **2** est en liaison pivot d'axe $(A, \vec{z}_0)$ avec le bras **1** avec $\overrightarrow{OA} = r_1 \cdot \vec{x}_1$. La position angulaire du pignon moteur **2** par rapport au bras **1** est notée : $\theta_{2/1} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$.

Le pignon moteur **2** de rayon primitif r_2 roule sans glisser en K sur le pignon fixe de rayon primitif r_0 lié au bâti **0**. Un moteur est installé entre le bras **1** et le pignon moteur **2**. L'action mécanique du stator lié à **1** sur le rotor lié à **2** est modélisée en A par le torseur couple :

$$\{\mathcal{T}_{CEM,1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{A,CEM,1 \rightarrow 2}} = C_m \cdot \vec{z}_0 \end{Bmatrix}_A$$

Les caractéristiques du bras **1** sont :

- Masse : m_1
- Centre de gravité : G_1 avec $\overrightarrow{OG_1} = L \cdot \vec{x}_1$
- Moment d'inertie autour de l'axe $(O, \vec{z}_0)$: I_1

Les caractéristiques du bras **2** sont :

- Masse : m_2
- Centre de gravité : G_2 avec $\overrightarrow{OG_2} = r_1 \cdot \vec{x}_1 + h \cdot \vec{z}_0$
- Moment d'inertie autour de l'axe $(A, \vec{z}_0)$: I_2

La position du point K est définie par : $\overrightarrow{AK} = -r_2 \cdot \vec{x}_1 + H \cdot \vec{z}_0$

L'accélération de la pesanteur est notée : $\vec{g} = -g \cdot \vec{z}_0$

Toutes les liaisons sont considérées comme parfaites.

2 Travail demandé

Question 1 Réaliser le graphe de structure du système.

Question 2 Traduire la condition de roulement sans glissement du pignon **2** sur le pignon fixe lié au bâti **0** en K pour obtenir une relation liant $\dot{\theta}_{1/0}$ et $\dot{\theta}_{2/1}$

La condition de roulement sans glissement s'écrit :

$$\overrightarrow{V_{K \in 2/0}} = \vec{0}$$

D'où:

$$\overrightarrow{V_{K \in 2/1}} + \overrightarrow{V_{K \in 1/0}} = \overrightarrow{0}$$

Avec:

$$\overrightarrow{V_{K \in 2/1}} = \overrightarrow{V_{A \in 2/1}} + \overrightarrow{AK} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \overrightarrow{0} + (-r_2 \cdot \vec{x}_1 + H \cdot \vec{z}_0) \wedge \dot{\theta}_{2/1} \vec{z}_0 = r_2 \cdot \dot{\theta}_{2/1} \cdot \vec{y}_1$$

Et :

$$\overrightarrow{V_{K \in 1/0}} = \overrightarrow{V_{O \in 2/1}} + \overrightarrow{OK} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \overrightarrow{0} + (r_1 - r_2 \cdot \vec{x}_1 + H \cdot \vec{z}_0) \wedge \dot{\theta}_{1/0} \vec{z}_0 = (r_2 - r_1) \cdot \dot{\theta}_{1/0} \cdot \vec{y}_1$$

D'où (en posant $r_1 - r_2 = r_0$):

$$r_2 \cdot \dot{\theta}_{2/1} - r_0 \cdot \dot{\theta}_{1/0} = 0$$

$$\frac{\dot{\theta}_{1/0}}{\dot{\theta}_{2/1}} = \frac{r_2}{r_0}$$

Question 3 Déterminez les énergies cinétiques du bras **1** et du pignon moteur **2** dans leurs mouvement par rapport au bâti **0**.

• Solide 1:

$$E_{c,1/0} = \frac{1}{2} \{ \mathcal{C}_{1/0} \} \otimes \{ \mathcal{V}_{1/0} \} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \begin{matrix} m_1 \cdot \overrightarrow{V_{G_1 \in 1/0}} \\ I_1 \cdot \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \end{matrix} \right\}_O \otimes \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ \overrightarrow{V_{O \in 1/0}} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \cdot I_1 \cdot (\dot{\theta}_{1/0})^2$$

• Solide 2:

$$E_{c,2/0} = \frac{1}{2} \{ \mathcal{C}_{2/0} \} \otimes \{ \mathcal{V}_{2/0} \} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \begin{matrix} m_2 \cdot \overrightarrow{V_{G_2 \in 2/0}} \\ I_2 \cdot \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \end{matrix} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \\ \overrightarrow{V_{A \in 2/0}} \end{matrix} \right\}$$

$$\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = (\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0}) \cdot \vec{z}_0$$

$$\overrightarrow{V_{A \in 2/0}} = \overrightarrow{V_{A \in 2/1}} + \overrightarrow{V_{A \in 1/0}} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = r_1 \cdot \dot{\theta}_{1/0} \cdot \vec{y}_1$$

$$\overrightarrow{V_{G_2 \in 2/0}} = \overrightarrow{V_{A \in 2/0}} + \overrightarrow{G_2A} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}} = r_1 \cdot \dot{\theta}_{1/0} \cdot \vec{y}_1 - h \cdot \vec{z}_0 \wedge (\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0}) \cdot \vec{z}_0 = r_1 \cdot \dot{\theta}_{1/0} \cdot \vec{y}_1 \quad \text{D'où:}$$

$$E_{c,2/0} = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (r_1 \cdot \dot{\theta}_{1/0})^2 + \frac{1}{2} \cdot I_2 \cdot (\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})^2$$

Question 4 Donner l'expression de l'inertie équivalente I_{eq} ramenée sur l'arbre moteur.

$$E_{c,tot/0} = E_{c,1/0} + E_{c,2/0} = \frac{1}{2} \cdot I_1 \cdot (\dot{\theta}_{1/0})^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (r_1 \cdot \dot{\theta}_{1/0})^2 + \frac{1}{2} \cdot I_2 \cdot (\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(I_1 \cdot \left(\frac{\dot{\theta}_{1/0}}{\dot{\theta}_{2/1}} \right)^2 + m_2 \cdot r_1^2 \cdot \left(\frac{\dot{\theta}_{1/0}}{\dot{\theta}_{2/1}} \right)^2 + I_2 \cdot \left(\frac{\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0}}{\dot{\theta}_{2/1}} \right)^2 \right) \cdot \dot{\theta}_{2/1}^2$$

$$E_{c,tot/0} = \frac{1}{2} \cdot \left(I_1 \cdot \left(\frac{r_2}{r_0} \right)^2 + m_2 \cdot r_1^2 \cdot \left(\frac{r_2}{r_0} \right)^2 + I_2 \cdot \left(1 + \frac{r_2}{r_0} \right)^2 \right) \cdot \dot{\theta}_{2/1}^2$$

Qui est de la forme :

$$E_{c,tot/0} = \frac{1}{2} \cdot I_{eq} \cdot \dot{\theta}_{2/1}^2$$

D'où :

$$I_{eq} = I_1 \cdot \left(\frac{r_2}{r_0} \right)^2 + m_2 \cdot r_1^2 \cdot \left(\frac{r_2}{r_0} \right)^2 + I_2 \cdot \left(1 + \frac{r_2}{r_0} \right)^2$$

Question 5 Faites un bilan des puissances et déterminez les expressions des différentes puissances mises en jeu.

Puissance extérieure:

- Puissance de l'effort de 0 sur 1: $P_{0 \rightarrow 1/0} = 0$ car les liaisons sont parfaites
- Puissance de l'effort de 0 sur 2: $P_{0 \rightarrow 2/0} = 0$ car les liaisons sont parfaites
- Puissance de l'effort de la pesanteur sur 1 :

$$P_{pesanteur \rightarrow 1/0} = \{\mathcal{T}_{pes \rightarrow 1}\} \otimes \{\mathcal{V}_{1/0}\} =_{G_1} \left\{ \begin{array}{c} -m_1 \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\} \otimes_{G_1} \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ \overrightarrow{V_{G_1 \in 1/0}} = r_1 \cdot \dot{\theta}_{1/0} \cdot \vec{y}_1 \end{array} \right\} = 0$$

- Puissance de l'effort de la pesanteur sur 2 :

$$P_{pesanteur \rightarrow 2/0} = \{\mathcal{T}_{pes \rightarrow 2}\} \otimes \{\mathcal{V}_{2/0}\} =_{G_2} \left\{ \begin{array}{c} -m_2 \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\} \otimes_{G_2} \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \\ \overrightarrow{V_{G_2 \in 1/0}} = r_1 \cdot \dot{\theta}_{2/0} \cdot \vec{y}_1 \end{array} \right\} = 0$$

Puissance intérieures:

- Puissance interne des efforts entre 1 et 2 : $P_{1 \leftrightarrow 2} = 0$ car les liaisons sont parfaites
- Puissance développée par le couple moteur entre 1 et 2:

$$P_{CEM, 1 \leftrightarrow 2} = \{\mathcal{T}_{CEM, 1 \rightarrow 2}\} \otimes \{\mathcal{V}_{2/1}\} =_A \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{A, CEM, 1 \rightarrow 2}} = C_m \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\} \otimes_A \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_{2/1} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\} = C_m \cdot \dot{\theta}_{2/1}$$

Question 6 Appliquer le théorème de l'énergie cinétique et déterminer les expressions de C_m en fonction de $\ddot{\theta}_{2/1}$ et des autres données.

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit:

$$\frac{d}{dt} E_{c, tot/0} = \sum P_{ext/0} + \sum P_{int}$$

Donc

$$I_{eq} \cdot \ddot{\theta}_{2/1} \cdot \dot{\theta}_{2/1} = C_m \cdot \dot{\theta}_{2/1}$$

L'équation de dynamique s'écrit alors:

$$I_{eq} \cdot \ddot{\theta}_{2/1} = C_m$$