

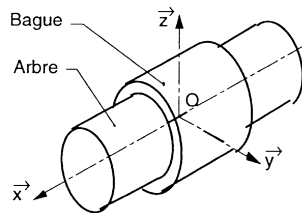


1 Mise en situation

La pompe à engrenage sert à alimenter un vérin hydraulique de table élévatrice de mise en palette de bocaux, terrines, flacons et gobelets (verres à eau, verres à moutarde, verres mesureurs...) de la société Verrerie Mécanique Champenoise. Les cadences de fabrication sont comprises entre 2 et 5 millions d'articles par jour. Chaque ligne de fabrication possède son propre palettiseur, les palettes étant de dimension de 1 sur 1,2 mètre. Ce type de pompe est adapté à des pressions moyennes (jusqu'à 250 bars) et vitesses moyennes (jusqu'à 2000 tr/mn). Faciles à fabriquer, ces pompes sont peu coûteuses mais assez bruyantes (bruit de l'engrenage).

2 Dimensionnement des coussinets

Les coussinets sont des supports des arbres de rotation de la pompe, il est nécessaire de les dimensionner en fonction des efforts repris. La symétrie du système permet de ne s'occuper que d'un seul des coussinets. Voici le montage d'un coussinet sur un des arbres de pompes.



Question 1 Nommez la liaison entre le coussinet et l'arbre, donnez le torseur des actions mécaniques transmissible par cette liaison.

C'est une liaison pivot glissant.

$$\{\mathcal{T}_{\text{Arbre} \rightarrow \text{Coussinet}}\} = \begin{Bmatrix} Y.\vec{y} + Z.\vec{z} \\ M.\vec{y} + N.\vec{z} \end{Bmatrix}_O$$

On décide de prendre quelques hypothèses de simplification afin de simplifier l'étude:

- Le contact est sans frottement (présence d'huile) ;
- La liaison est à jeu nul (importance de la précision de guidage pour l'étanchéité entre zone haute et basse pression).
- Les formes géométriques sont parfaites.
- L'action de l'arbre sur le coussinet est uniquement du à l'action de l'huile sur les pignons.

On se place en limite d'utilisation exigée, c'est à dire avec une pression de $p_{max} = 250$ bars. Une première étude permet de trouver l'expression du torseur de l'action de l'arbre sur le coussinet:

$$\{\mathcal{T}_{\text{Arbre} \rightarrow \text{Coussinet}}\} = \begin{Bmatrix} 0,5.p_{max}.D_a.L_p.\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$$

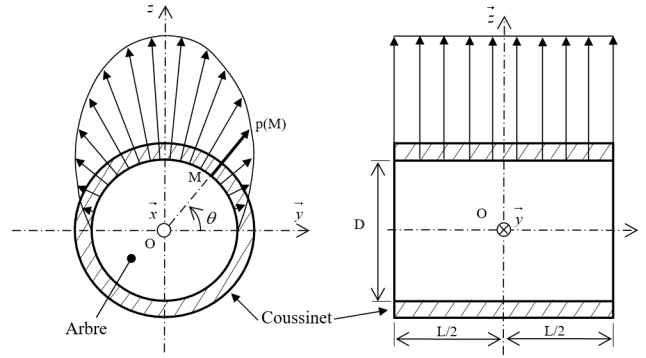
Avec $D_a = 42\text{mm}$ le diamètre de la tête du pignon et $L_p = 7\text{mm}$ la largeur de la denture.

On cherche à déterminer la pression maximale que va reprendre le coussinet afin de vérifier sa tenue mécanique. Au vu de l'hypothèse de jeu nul, on propose une répartition de la pression de contact comme ceci.

Pour ce modèle, la fonction de répartition des actions de contact est :

$$p(M) = p(x, \theta) = f_1(x).f_2(\theta)$$

Avec:



- $f_1(x) = P_2$ constant
- $f_2(\theta) = \sin(\theta)$ pour $\theta \in [0, \pi]$
- $f_2(\theta) = 0$ pour $\theta \in [\pi, 2\pi]$

Question 2 Déterminez la pression maximale s'exerçant sur la surface de contact entre l'arbre et le coussinet.

La surface de contact est définie par :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{D}{2} \cdot \vec{u}_r + x \cdot \vec{x}$$

$$\forall \theta \in [0, \pi], \forall x \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$$

La normale de contact est $\vec{u}_r$.

On peut alors définir le torseur des actions de l'arbre sur le coussinet.

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}_{Arbre \rightarrow Coussinet}\} &= \left\{ \int_S p(M) \cdot \vec{u}_r dS \right\}_O = \left\{ \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^\pi P_2 \cdot \sin(\theta) \cdot \vec{u}_r \cdot \frac{D}{2} \cdot d\theta \cdot dx \right\} \\ &= \left\{ \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^\pi \left(\frac{D}{2} \cdot \vec{u}_r + x \cdot \vec{x} \right) \wedge P_2 \cdot \sin(\theta) \cdot (\cos(\theta) \cdot \vec{y} + \sin(\theta) \cdot \vec{z}) \cdot \frac{D}{2} \cdot d\theta \cdot dx \right\} \end{aligned}$$

En projetant sur $\vec{z}$:

$$F_{Arbre \rightarrow Coussinet} \cdot \vec{z} = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^\pi P_2 \cdot \sin(\theta)^2 \cdot \frac{D}{2} \cdot d\theta \cdot dx$$

Or:

$$\cos(a+b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)$$

D'où:

$$\begin{aligned} \cos(2\theta) &= \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 = 1 - 2 \cdot \sin(\theta)^2 \\ \sin(\theta)^2 &= \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned} F_{Arbre \rightarrow Coussinet} \cdot \vec{z} &= \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^\pi P_2 \cdot \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \cdot \frac{D}{2} \cdot d\theta \cdot dx \\ &= \frac{P_2 \cdot D}{4} \left(\int_{-L/2}^{L/2} \int_0^\pi d\theta \cdot dx - \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^\pi \cos(2\theta) \cdot d\theta \cdot dx \right) = \frac{P_2 \cdot D}{4} \left(\int_{-L/2}^{L/2} \pi \cdot dx - \int_{-L/2}^{L/2} [\sin(2\theta)/2]_0^\pi \cdot dx \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{P_2 \cdot D}{4} (L \cdot \pi - \int_{-L/2}^{L/2} 0 \cdot dx) = \frac{P_2 \cdot L \cdot D \cdot \pi}{4}$$

La projection sur $\vec{y}$ est nulle de part la symétrie du problème.

Le calcul du moment est nulle pour la même raison.

On a donc:

$$\{\mathcal{T}_{Arbre \rightarrow Coussinet}\} = \left\{ \begin{matrix} 0, 25 \cdot P_2 \cdot D \cdot L \cdot \pi \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} 0, 5 \cdot p_{max} \cdot D_a \cdot L_p \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_O$$

On a donc:

$$0, 25 \cdot P_2 \cdot D \cdot L \cdot \pi = 0, 5 \cdot p_{max} \cdot D_a \cdot L_p$$

Donc

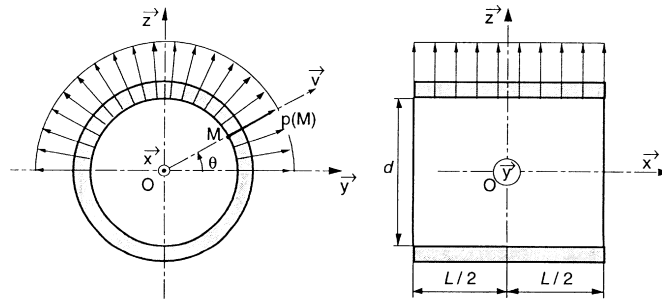
$$P_2 = \frac{2 \cdot p_{max} \cdot D_a \cdot L_p}{D \cdot L \cdot \pi} = 1, 17 \cdot 10^7 \text{ Pa}$$

Or le maximum de la fonction de pression est P_2

Question 3 Le coussinet possède une charge maximale admissible de $10 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$ (document constructeur) est il adapté pour cette pompe?

$10 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2} = 10^7 \text{ Pa} < P_2$. Le palier n'est pas adapté pour l'utilisation faite, il faut en changer.

Un modèle simplifié permet un choix plus rapide de coussinet en bureau d'études:



Pour ce modèle, la fonction de répartition des actions de contact est :

$$p(M) = p(x, \theta) = P_3$$

Question 4 Déterminez pour cette répartition de pression de contact, la valeur de la pression maximale.

La surface de contact est définie par :

$$\vec{OM} = \frac{D}{2} \cdot \vec{u}_r + x \cdot \vec{x}$$

$$\forall \theta \in [0, \pi], \forall x \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$$

La normale de contact est $\vec{u}_r$.

On peut alors définir le torseur des actions de l'arbre sur le coussinet.

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}_{Arbre \rightarrow Coussinet}\} &= \left\{ \begin{matrix} \int_S p(M) \cdot \vec{u}_r dS \\ \int_S \vec{OM} \wedge p(M) \cdot \vec{u}_r dS \end{matrix} \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^\pi P_3 \cdot \vec{u}_r \cdot \frac{D}{2} \cdot d\theta \cdot dx \\ \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^\pi (\frac{D}{2} \cdot \vec{u}_r + x \cdot \vec{x}) \wedge P_3 \cdot \vec{u}_r \cdot \frac{D}{2} \cdot d\theta \cdot dx \end{matrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{matrix} \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^\pi P_3 \cdot (\cos(\theta) \cdot \vec{y} + \sin(\theta) \cdot \vec{z}) \cdot \frac{D}{2} \cdot d\theta \cdot dx \\ \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^\pi (\frac{D}{2} \cdot \vec{u}_r + x \cdot \vec{x}) \wedge P_3 \cdot (\cos(\theta) \cdot \vec{y} + \sin(\theta) \cdot \vec{z}) \cdot \frac{D}{2} \cdot d\theta \cdot dx \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

En projetant la résultante sur $\vec{z}$:

$$F_{Arbre \rightarrow Coussinet} \cdot \vec{z} = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^\pi P_3 \cdot \sin(\theta) \cdot \frac{D}{2} \cdot d\theta dx = L \cdot P_3 \cdot \frac{D}{2} \cdot [-\cos(\theta)]_0^\pi = L \cdot D \cdot P_3$$

La projection sur $\vec{y}$ est nulle de part la symétrie du problème.

Le calcul du moment est nulle pour la même raison.

On a donc:

$$\{\mathcal{T}_{Arbre \rightarrow Coussinet}\} = \underset{O}{\left\{ \begin{array}{c} D \cdot L \cdot P_3 \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}} = \underset{O}{\left\{ \begin{array}{c} 0,5 \cdot p_{max} \cdot D_a \cdot L_p \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

On a donc:

$$D \cdot L \cdot P_3 = 0,5 \cdot p_{max} \cdot D_a \cdot L_p$$

Donc

$$P_3 = \frac{p_{max} \cdot D_a \cdot L_p}{2 \cdot D \cdot L}$$

Or le maximum de la fonction de pression est P_3

Question 5 Déterminez l'erreur réalisée dans ce cas et le coefficient correcteur à apporter pour trouver la pression maximale obtenue lors de la première modélisation.

On calcule le rapport $\frac{P_3}{P_2}$ pour en déterminer l'erreur faites.

$$\frac{P_2 \cdot D \cdot L \cdot \pi}{4} = D \cdot L \cdot P_3$$

On trouve:

$$\frac{P_3}{P_2} = \frac{\pi}{4}$$