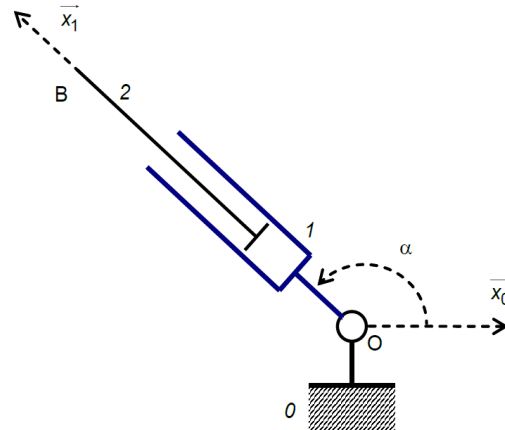




Exercice 1

On s'intéresse à un camion en phase de déchargement dont on donne un extrait de cahier des charges fonctionnel. Deux vérins commandent le mouvement de la benne. Dans la suite on s'intéressera à un seul vérin.



Exigence technique	Critère	Valeur
1.5	Vitesse angulaire de la benne	<0,5 tr/min

Paramétrage :

- Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère lié au châssis (0) du camion benne.
- Soient $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et $R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ deux repères liés respectivement aux corps (1) et à la tige (2) d'un des deux vérins hydrauliques. On suppose que le vérin étudié corps (1) + tige (2) se déplace dans le plan $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$.
- Le corps (1) a un mouvement de rotation d'axe $(O, \vec{z}_0)$ par rapport au bâti (0). On pose $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$.
- La tige (2) a un mouvement de translation rectiligne de direction $\vec{x}_1$ par rapport au corps (1). On pose $\vec{OB} = \lambda \cdot \vec{x}_1$.

Caractéristique du vérin:

- débit volumique d'huile injectée dans le vérin $Q = 0,2l/s$;
- diamètre du piston du vérin $D = 61mm$;

Question 1 Réaliser la figure de changement de base pour la rotation.

Question 2 Déterminer l'expression du vecteur taux de rotation.

$$\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_0$$

Question 3 Que dire des bases B_1 et B_2 ? En déduire $\vec{\Omega}_{2/1}$. Les bases B_1 et B_2 sont confondues car les solides 1 et 2 sont en translation l'un par rapport à l'autre donc $\vec{\Omega}_{2/1} = \vec{0}$

Remarque: Dans le mouvement du solide 1 dans son mouvement par rapport à 0, λ ne varie pas, on calcul la vitesse à un instant pour une valeur de λ donnée.

Question 4 Déterminez les vecteurs vitesses $\overrightarrow{V_{B \in 2/1}}$, $\overrightarrow{V_{B \in 1/0}}$ et $\overrightarrow{V_{B \in 2/0}}$

Calcul de $\overrightarrow{V_{B \in 2/1}}$:

$$\overrightarrow{V_{B \in 2/1}} = \left[\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt} \right]_{R_1} = \left[\frac{d \lambda \cdot \overrightarrow{x_1}}{dt} \right]_{R_1} = \dot{\lambda} \cdot \overrightarrow{x_1}$$

Calcul de $\overrightarrow{V_{B \in 1/0}}$:

$$\overrightarrow{V_{B \in 1/0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d \lambda \cdot \overrightarrow{x_1}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d \lambda \cdot \overrightarrow{x_1}}{dt} \right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \lambda \cdot \overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{0} + \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_0} \wedge \lambda \cdot \overrightarrow{x_1} = \lambda \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1}$$

Car dans le mouvement de 1 par rapport à 0 on prends λ fixe.

Calcul de $\overrightarrow{V_{B \in 2/0}}$:

$$\overrightarrow{V_{B \in 2/0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d \lambda \cdot \overrightarrow{x_1}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d \lambda \cdot \overrightarrow{x_1}}{dt} \right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \lambda \cdot \overrightarrow{x_1} = \dot{\lambda} \cdot \overrightarrow{x_1} + \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_0} \wedge \lambda \cdot \overrightarrow{x_1} = \dot{\lambda} \cdot \overrightarrow{x_1} + \lambda \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1}$$

Mais on peut aussi utiliser la composition des vitesses linéaires:

$$\overrightarrow{V_{B \in 2/0}} = \overrightarrow{V_{B \in 2/1}} + \overrightarrow{V_{B \in 1/0}} = \dot{\lambda} \cdot \overrightarrow{x_1} + \lambda \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1}$$

Question 5 Exprimer la vitesse de déploiement $\dot{\lambda}$ du vérin en fonction du débit Q dans le vérin et du diamètre du piston D .

$$Q = \dot{\lambda} \cdot S = \dot{\lambda} \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

La vitesse de rotation de la benne $\dot{\theta}$ est reliée à $\overrightarrow{V_{B \in 2/0}}$ par la relation $\|\overrightarrow{V_{B \in 2/0}}\| = L \cdot \dot{\theta}$ On donne $L = 2m$, $\lambda = 3m$ et $\dot{\alpha} = 0.2tr/min$

Question 6 Calculez la vitesse de rotation de la benne $\dot{\theta}$ et conclure quant au respect du cahier des charges.

$$\|\overrightarrow{V_{B \in 2/0}}\| = L \cdot \dot{\theta} = \sqrt{\overrightarrow{V_{B \in 2/0}} \cdot \overrightarrow{V_{B \in 2/0}}} = \sqrt{\dot{\lambda}^2 + (\lambda \cdot \dot{\alpha})^2}$$

L'expression du débit donne:

$$\dot{\lambda} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2} = \frac{4 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot (61 \cdot 10^{-3})^2} = 0,07 m \cdot s^{-1}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\sqrt{\dot{\lambda}^2 + (\lambda \cdot \dot{\alpha})^2}}{L} = \frac{\sqrt{0,07^2 + (3 \cdot 0,2 \cdot \pi / 60)^2}}{2} = 0,047 rad \cdot s^{-1} = 0,45 tr \cdot min^{-1}$$

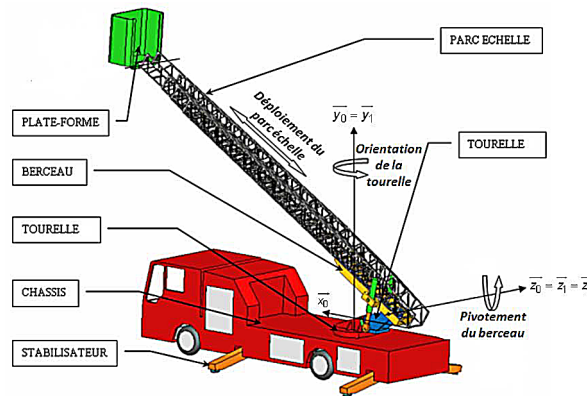
Le cahier des charges est validé

Question 7 Déterminez le vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma_{B \in 2/0}}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Gamma_{B \in 2/0}} &= \left[\frac{d\overrightarrow{V_{B \in 2/0}}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\dot{\lambda} \cdot \overrightarrow{x_1}}{dt} \right]_{R_0} + \left[\frac{d\lambda \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1}}{dt} \right]_{R_0} \\ \overrightarrow{\Gamma_{B \in 2/0}} &= \left[\frac{d\dot{\lambda} \cdot \overrightarrow{x_1}}{dt} \right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \dot{\lambda} \cdot \overrightarrow{x_1} + \left[\frac{d\lambda \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1}}{dt} \right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \lambda \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1} \\ \overrightarrow{\Gamma_{B \in 2/0}} &= \ddot{\lambda} \cdot \overrightarrow{x_1} + \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} \wedge \dot{\lambda} \cdot \overrightarrow{x_1} + (\dot{\lambda} \cdot \dot{\alpha} + \lambda \cdot \ddot{\alpha}) \cdot \overrightarrow{y_1} + \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} \wedge \lambda \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1} \\ \overrightarrow{\Gamma_{B \in 2/0}} &= \ddot{\lambda} \cdot \overrightarrow{x_1} + \dot{\lambda} \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1} + (\dot{\lambda} \cdot \dot{\alpha} + \lambda \cdot \ddot{\alpha}) \cdot \overrightarrow{y_1} - \lambda \cdot (\dot{\alpha})^2 \cdot \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{\Gamma_{B \in 2/0}} &= (\ddot{\lambda} - \lambda \cdot \dot{\alpha}^2) \cdot \overrightarrow{x_1} + (2 \cdot \dot{\lambda} \cdot \dot{\alpha} + \lambda \cdot \ddot{\alpha}) \cdot \overrightarrow{y_1} \end{aligned}$$

Exercice 2

On s'intéresse à une Échelle Pivotante Automatique à commande Séquentielle. Ce système conçu et commercialisé par la société CAMIVA est monté sur le châssis d'un camion de pompiers et permet de déplacer une plate-forme pouvant recevoir deux personnes et un brancard (charge maxi 270 kg) le plus rapidement possible et en toute sécurité.



Ce système est constitué de cinq solides :

- Le châssis **(0)**, de repère associé $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, fixe par rapport au sol tel que l'axe $(O, \vec{y}_0)$ soit dirigé suivant la verticale ascendante.
- La tourelle **(1)**, de repère associé $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, en mouvement de rotation (non étudié ici) d'axe $(O, \vec{y}_0)$ par rapport à **(0)**.
- Le berceau **(2)**, de repère associé $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, en mouvement de rotation d'axe $(A, \vec{z}_1)$ par rapport à la tourelle **(1)** tel que $\vec{OA} = -b.\vec{x}_1 + a.\vec{y}_1$ (a et b constants), $\vec{AC} = c.\vec{x}_2$ (c constant) et $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \theta$.
- L'échelle **(3)**, de repère associé $R_3(D, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$, en mouvement de translation rectiligne de direction $\vec{x}_2$ par rapport au berceau **(2)** tel que $\vec{CD} = \lambda(t)\vec{x}_2$.
- Le vérin de dressage **(4 + 5)** (non étudié ici).

Pour des raisons de confort et de sécurité, il est nécessaire que pendant la phase de dressage* de l'échelle, la norme de l'accélération subie par une personne située dans la nacelle ne dépasse pas un niveau défini dans le CdCF.

*Phase de dressage : les vérins de dressage font pivoter le berceau **2** pendant que le parc échelle **3** se déploie. Pendant cette phase, le système d'orientation de la tourelle **1** est inactif ($R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) = R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$).

Le système est représenté sous forme de schéma cinématique, en fin de document :

Objectif : déterminer, dans le but de valider le critère du Cahier des Charges Fonctionnel, le vecteur accélération du point D appartenant à l'échelle dans son mouvement par rapport au sol.

Question 1 Que dire des bases des repères $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ et $R_3(D, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$? En déduire $\vec{\Omega}_{3/2}$.

la liaison glissière impose une translation et pas de rotation entre les solides 2 et 3 donc il n'y a pas de rotation entre les bases qui sont donc identiques:

$$\vec{\Omega}_{3/2} = \vec{0}$$

Question 2 Réaliser la figure de changement de base correspondant au mouvement entre 2 et 1.

Question 3 Indiquer sous cette figure l'expression du vecteur rotation correspondant.

$$\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \dot{\theta} \cdot \vec{z}_1$$

Question 4 En déduire l'expression $\overrightarrow{\Omega_{3/0}}$.

$$\overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \overrightarrow{\Omega_{3/2}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \vec{0} + \dot{\theta} \cdot \vec{z}_1 + \vec{0} = \dot{\theta} \cdot \vec{z}_1$$

Question 5 Déterminer le vecteur vitesse, $\overrightarrow{V_{D \in 3/0}}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{D \in 3/0}} &= \left[\frac{d\overrightarrow{OD}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} \right]_{R_0} + \left[\frac{d\overrightarrow{AC}}{dt} \right]_{R_0} + \left[\frac{d\overrightarrow{CD}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d(-b \cdot \vec{x}_1 + a \cdot \vec{y}_1)}{dt} \right]_{R_0} + \left[\frac{d \ c \cdot \vec{x}_2}{dt} \right]_{R_0} + \left[\frac{d \ \lambda \cdot \vec{x}_2}{dt} \right]_{R_0} \\ \overrightarrow{V_{D \in 3/0}} &= \left[\frac{d(-b \cdot \vec{x}_1 + a \cdot \vec{y}_1)}{dt} \right]_{R_1} + \left[\frac{d \ c \cdot \vec{x}_2}{dt} \right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge c \cdot \vec{x}_2 + \left[\frac{d \ \lambda \cdot \vec{x}_2}{dt} \right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \lambda \cdot \vec{x}_2 \\ \overrightarrow{V_{D \in 3/0}} &= \vec{0} + \vec{0} + \dot{\theta} \cdot \vec{z}_1 \wedge c \cdot \vec{x}_2 + \dot{\lambda} \cdot \vec{x}_2 + \dot{\theta} \cdot \vec{z}_1 \wedge \lambda \cdot \vec{x}_2 \\ \overrightarrow{V_{D \in 3/0}} &= \dot{\lambda} \cdot \vec{x}_2 + (c + \lambda) \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_2 \end{aligned}$$

Question 6 Déterminer le vecteur accélération, $\overrightarrow{\Gamma_{D \in 3/0}}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Gamma_{D \in 3/0}} &= \left[\frac{d\overrightarrow{V_{D \in 3/0}}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\dot{\lambda} \cdot \vec{x}_2}{dt} \right]_{R_0} + \left[\frac{d(c + \lambda) \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_2}{dt} \right]_{R_0} \\ \overrightarrow{\Gamma_{D \in 3/0}} &= \left[\frac{d\dot{\lambda} \cdot \vec{x}_2}{dt} \right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \dot{\lambda} \cdot \vec{x}_2 + \left[\frac{d(c + \lambda) \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_2}{dt} \right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge (c + \lambda) \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_2 \\ \overrightarrow{\Gamma_{D \in 3/0}} &= \ddot{\lambda} \cdot \vec{x}_2 + \dot{\theta} \cdot \vec{z}_1 \wedge \dot{\lambda} \cdot \vec{x}_2 + ((c + \lambda) \cdot \ddot{\theta} + \dot{\lambda} \cdot \dot{\theta}) \cdot \vec{y}_2 + \dot{\theta} \cdot \vec{z}_1 \wedge (c + \lambda) \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_2 \\ \overrightarrow{\Gamma_{D \in 3/0}} &= \ddot{\lambda} \cdot \vec{x}_2 + \dot{\theta} \cdot \dot{\lambda} \cdot \vec{y}_2 + ((c + \lambda) \cdot \ddot{\theta} + \dot{\lambda} \cdot \dot{\theta}) \cdot \vec{y}_2 - (c + \lambda) \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{x}_2 \\ \overrightarrow{\Gamma_{D \in 3/0}} &= (\ddot{\lambda} - (c + \lambda) \cdot \dot{\theta}^2) \cdot \vec{x}_2 + ((c + \lambda) \cdot \ddot{\theta} + 2 \cdot \dot{\lambda} \cdot \dot{\theta}) \cdot \vec{y}_2 \end{aligned}$$

