



Space Mountain



Figure 1: Photo de l'attraction

1 Mise en situation

Cette attraction est installée au parc EuroDisney. Elle se présente sous la forme d'un chapiteau renfermant une montagne russe à grande vitesse. Les passagers peuvent faire l'expérience d'un voyage évoquant l'histoire du roman de JULES VERNES "de la terre à la lune", grâce à de somptueux décors spatiaux. Les voitures sont sonorisées en synchronisation avec le circuit qui comporte trois renversements complets.

Le système de lancement, évoquant un canon, est en fait une catapulte à propulsion électrique de type porte-avions. Un poussoir vient en contact avec le train afin de le propulser. La motorisation de ce dispositif fait l'objet de cet exercice.

2 Simulation du comportement de la catapulte.

Le canon est constitué d'un fût cylindrique de 5 m de diamètre et de longueur 50 m environ. L'extérieur du canon est conçu de manière à donner l'illusion d'un véritable lancement : recul d'un fût mobile, ouverture d'une porte latérale, rotation d'un soleil stylisé, émission d'un nuage de vapeur et d'un bang sonore. L'intérieur du canon contient uniquement la rampe de lancement.

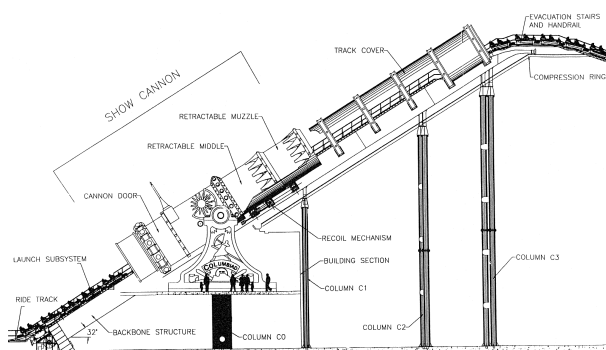


Figure 2: Schéma de la propulsion.

	Exigences	Critères	Niveaux
1	Propulser en toute sécurité un train de passagers vers le point d'entrée de la montagne russe	Durée du cycle de lancement du train Masse propulsée Inclinaison de la voie Maintien en position Vitesse de propulsion maxi Accélération maxi Précision	16 secondes maxi 7500 kg maxi 34° Frein de parking 14 m/s maxi 8 m/s² mini ±1m/s² Erreur statique nulle

Table 1: Extrait du cahier des charges

3 Validation du temps de cycle de lancement

Les figures 3 et 4 représentent les chronogrammes du train et du pousseur dans la catapulte. Le train est en contact avec le pousseur pendant les phases 1 et 2 et rentrent dans l'attraction à une vitesse $V_b = 4\text{m/s}$. La phase 1 correspond à une phase de test dynamique du système de lancement. Le pousseur monte alors le train dans le canon. La phase 2 correspond à la phase de lancement. Le train est lancé par l'intermédiaire du pousseur avec une accélération de 8m/s^2 jusqu'à une vitesse de 14m/s . Lorsque cette vitesse est atteinte, le pousseur se désolidarise du train. Le train, qui se déplace sur un axe parallèle à la surface du toit conique, termine son ascension sur sa lancée à une vitesse d'apogée de 4m/s au minimum. Il rentre alors dans un virage vertical pour entamer un plongeon dans la montagne russe.

La phase 0 correspond à la phase d'approche du train par le pousseur afin de venir en contact. Elle dure 5s. La phase 3 correspond à la phase où le pousseur ralentit et revient en position initiale.

L'objectif est de déterminer le temps de cycle du train dans la catapulte.

4 Travail demandé

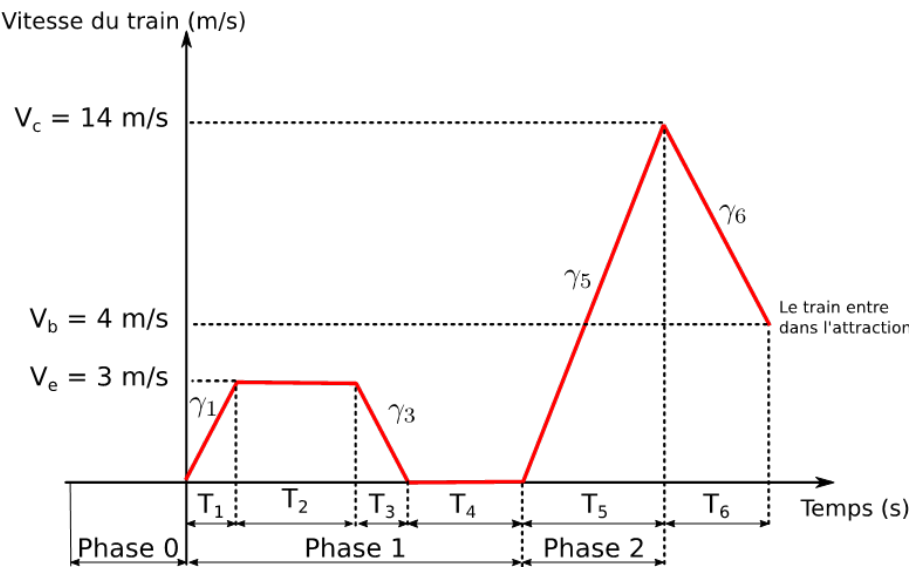


Figure 3: Étude du cycle de lancement du train

- Données :
- $|\gamma_1| = 2.5m.s^{-2}$
 - $|\gamma_3| = 3m.s^{-2}$
 - $|\gamma_5| = 8m.s^{-2}$
 - $T_2 = T_4 = 5s$
 - $L_{cycle} = 46.73m$

Question 1 Pour chacune des étapes 1 à 6 sur le chronogramme train , déterminer les accélérations γ_i , les durées T_i , les déplacements x_i . La démarche sera explicitée.

Phase 1:

- $\gamma_1 = cst = 2.5m.s^{-2}$
- $V_e = \gamma_1.T_1 = 3m.s^{-1} \Rightarrow T_1 = \frac{V_e}{\gamma_1} = 1.2s$
- $x_1 = \frac{1}{2}.\gamma_1.(T_1)^2 = 1.8m$

Phase 2:

- $\gamma_2 = cst = 0m.s^{-2}$
- $V_e = 3m.s^{-1}$
- $x_2 = V_e.T_2 = 15m$

On décide de prendre le déplacement qui se passe pour chaque phase et non le déplacement globale.

Phase 3:

- $\gamma_3 = cst = -3m.s^{-2}$
- $V_e = 3m.s^{-1}$ et $V_3(t = T_3 + T_2 + T_1) = 0 = \gamma_3.T_3 + V_e \Rightarrow T_3 = \frac{V_3 - V_e}{\gamma_3} = 1s$
- $x_3 = \frac{1}{2}.\gamma_3.(T_3)^2 + V_e.T_3 = 1,5m$

Phase 4:

- $\gamma_4 = cst = 0m.s^{-2}$
- $V_4 = cst = 0m.s^{-1}$
- $x_4 = 0m$

Phase 5:

- $\gamma_5 = cst = 8m.s^{-2}$
- $V_e = 14m.s^{-1} = \gamma_5.T_5 \Rightarrow T_5 = \frac{V_e}{\gamma_5} = 1.75s$
- $x_5 = \frac{1}{2}.\gamma_5.(T_5)^2 = 12.25m$

Phase 6:

La longueur du cycle donne:

$$x_6 = L_{cycle} - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 16.18m$$

On a de même:

$$\begin{cases} V_b = \gamma_6.T_6 + V_c \\ x_6 = \frac{1}{2}\gamma_6.(T_6)^2 + V_c.T_6 \end{cases}$$

Ce qui donne:

$$\begin{cases} V_b = \gamma_6.T_6 + V_c \\ x_6 = \frac{1}{2}(V_b - V_c).T_6 + V_c.T_6 = \frac{V_b + V_c}{2}.T_6 \Rightarrow T_6 = \frac{2.x_6}{V_b + V_c} = 1.8s \end{cases}$$

On en déduit:

$$\gamma_6 = \frac{V_b - V_c}{T_6} = -5.6m.s^{-2}$$

Question 2 Quel est le temps de cycle de lancement du train?

$$T_{lancement} = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 = 15.75$$

Le temps de lancement est compatible avec le cahier des charges

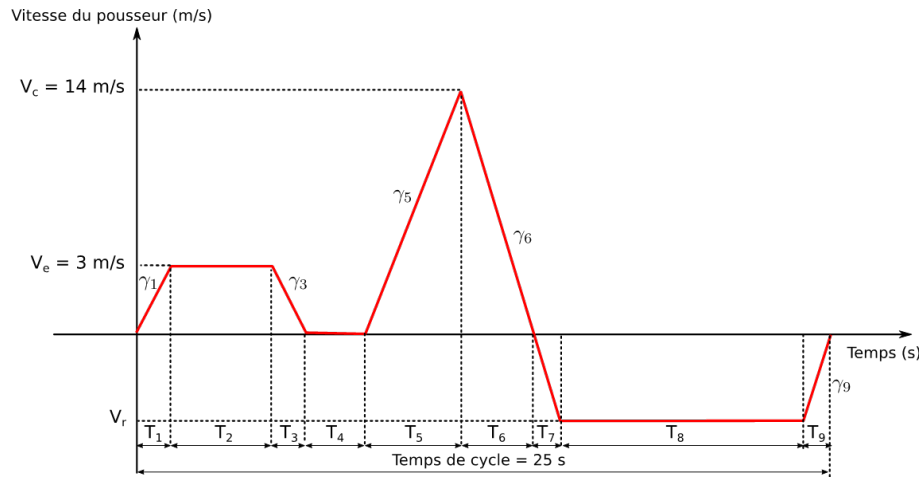


Figure 4: Étude du cycle du pousseur

Données :

- $|\gamma_6| = |\gamma_9| = 11 \text{ m.s}^{-2}$
- $T_7 = 1 \text{ s}$

Question 3 Déterminer la distance parcourue durant la phase aller du pousseur ainsi que T_6 .
Les 5 premières étapes sont identiques, pour la phase 6 on reprends comme la phase 3:

- $\gamma_6 = -11 \text{ m.s}^{-2}$
- $V_c = 14 \text{ m.s}^{-1}$ et $V(t = T_{max}) = 0 \text{ m.s}^{-1} = \gamma_6 \cdot T_6 + V_c \Rightarrow T_6 = \frac{0 - V_c}{\gamma_6} = 1.27 \text{ s}$
- $x_6 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_6 \cdot (T_6)^2 + V_c \cdot T_6 = 8.89 \text{ m}$

La distance parcourue est alors de :

$$d = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 39.44 \text{ m}$$

Et un temps total de:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 = 15.22 \text{ s}$$

Question 4 Déterminer alors V_r .

Notons les équations qui nous seront utiles:

$$\begin{cases} T_{\text{retour}} = T_7 + T_8 + T_9 = 25 \text{ s} - T_{\text{aller}} = 9.78 \text{ s} \\ x_{\text{retour}} = x_7 + x_8 + x_9 = -d = -39.44 \text{ m} \\ T_7 = 1 \text{ s} \\ \gamma_9 = 11 \text{ m.s}^{-2} \end{cases}$$

Les équations horaires donnent:

$$\begin{cases} x_7 = \frac{1}{2} \gamma_7 \cdot (T_7)^2 \\ x_8 = V_r \cdot T_8 \\ x_9 = -\frac{1}{2} \gamma_9 \cdot (T_9)^2 \\ V_r = \gamma_7 \cdot T_7 = -\gamma_9 \cdot T_9 \\ T_9 = -\frac{V_r}{\gamma_9} \end{cases}$$

L'équation x_{retour} donne:

$$x_{\text{retour}} = \frac{1}{2}\gamma_7 \cdot (T_7)^2 + V_r \cdot T_8 - \frac{1}{2}\gamma_7 \cdot (T_7)^2 +$$

On fait apparaître V_r :

$$x_{\text{retour}} = \frac{1}{2}V_r \cdot T_7 + T_8 \cdot V_r + \frac{1}{2} \cdot V_r \cdot T_9$$

(Cette équation revient à calculer l'air sous la courbe)

$$x_{\text{retour}} = V_r \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot T_7 + T_8 + \frac{1}{2} \cdot T_9 \right)$$

En faisant apparaître T_{retour} pour simplifier T_8 :

$$x_{\text{retour}} = V_r \cdot \left(T_{\text{retour}} - \frac{1}{2} \cdot T_7 - \frac{1}{2} \cdot T_9 \right)$$

Il ne reste que T_9 à simplifier:

$$x_{\text{retour}} = V_r \cdot \left(T_{\text{retour}} - \frac{1}{2} \cdot T_7 + \frac{1}{2} \cdot \frac{V_r}{\gamma_9} \right)$$

En développant et en passant tout du même côté on obtient l'équation:

$$\frac{(V_r)^2}{2 \cdot \gamma_9} + V_r \cdot \left(T_{\text{retour}} - \frac{T_7}{2} \right) - x_{\text{retour}} = 0$$

On trouve un polynôme de degré 2 dont on veut trouver les racines:

$$\begin{aligned} \frac{(V_r)^2}{22} + V_r \cdot (9.78 - 0.5) + 39.44 &= 0 \\ (V_r)^2 + 204.16 \cdot V_r + 867.68 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = (204.16)^2 - 4 \times 1 \times 867.68 = 38210.59$$

$$\begin{cases} V_{r1} = \frac{-204.16 + \sqrt{38210.59}}{2} = -4.34 \text{ m.s}^{-1} \\ V_{r2} = \frac{-204.16 - \sqrt{38210.59}}{2} = -199.82 \text{ m.s}^{-1} \end{cases}$$

Dans le cadre de $V_r = V_{r2}$ On peut calculer T_9 :

$$T_9 = -\frac{V_r}{\gamma_9} = 18.17 \text{ s}$$

Le temps est plus grand que le temps de retour, la solution n'est donc pas physique et on gardera alors:

$$V_r = -4.34 \text{ m.s}^{-1}$$