



**Objectif :** L'objectif de ce cours est de généraliser le Principe Fondamental de la Statique dans le cas où les solides ne sont pas à l'équilibre. L'objectif est de trouver des relations entre les efforts et les accélérations des différents solides du système.

## 1 Généralités et rappels.

### 1.1 Solide indéformable

Un solide est un ensemble de points matériels composant un système matériel. Il est dit indéformable si :

$$\forall A, B \in S, \forall t \quad \|\overrightarrow{AB}\|(t) = \text{constante}$$

### 1.2 Repère et référentiel

On définit un repère comme une base de vecteurs (3 vecteurs formant une base orthonormée directe permettant de définir d'autres vecteurs) à laquelle on associe un point d'origine. Chaque solide se voit associé un repère. Un référentiel est un repère auquel on a associé une mesure du temps.

### 1.3 Paramétrage

Pour repérer un solide par rapport à un autre dans le temps, on doit paramétrer la position du repère du premier solide dans le repère du second et son orientation : on définit donc les positions (x, y et z) du point d'origine du repère à paramétrer puis on définit les rotations grâce à des figures de changement de base.

### 1.4 Torseurs

Un torseur est un outil mathématique permettant de représenter un champ vectoriel, il s'écrit en un point donné et se compose de deux vecteurs : la résultante (invariante du point de l'espace choisi pour écrire le torseur) et un moment (variable en fonction du point choisi):

$$_M \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\text{Résultante}} \\ \overrightarrow{\text{Moment en } M} \end{array} \right\}$$

## 2 Hypothèses générales

Pour toutes les études d'équilibre statique ou de comportement en dynamique d'un système, nous nous placerons dans les conditions suivantes :

- Les solides étudiés seront supposés indéformables (à l'exception des ressorts que nous n'isolons pas)
- Le référentiel utilisé sera considéré comme galiléen.
  - La définition d'un référentiel galiléen est récursive : Il s'agit d'un référentiel dans lequel les lois de Newton s'appliquent ou d'un référentiel en mouvement de translation à vitesse constante par rapport à un autre référentiel galiléen.
  - Pour nos échelles de vitesse, de temps, et d'espace : Le référentiel terrestre sera considéré comme galiléen.

Ces hypothèses ont des limites :

- Tous les solides sont déformables dès qu'ils subissent un effort, on choisira de négliger ces déformations
- La notion de référentiel galiléen est assez subjective, aucun référentiel n'est réellement galiléen mais les écarts sont imperceptibles.

### 3 Grandeurs d'inertie

#### 3.1 Mise en évidence des grandeurs inertielles

L'énergie cinétique linéaire est connue comme :

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Cette énergie peut aussi se calculer en rotation, on étudie un solide en rotation autour d'un axe  $\Delta$  :

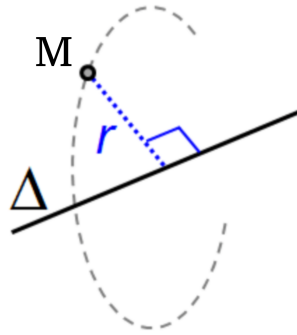


Figure 1: Mouvement de rotation.

L'énergie cinétique totale est la somme de l'énergie cinétique de chaque point :

$$E_c = \int_V \frac{1}{2} \|\overrightarrow{V_{M \in 1/0}}\|^2 \cdot dm$$

Or, la norme de la vitesse est connue dans un mouvement de rotation :  $\|\overrightarrow{V_{M \in 1/0}}\| = r \cdot \omega$

On obtient donc:

$$E_c = \int_V \frac{1}{2} (r \cdot \omega)^2 \cdot dm$$

et donc:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot \left( \int_V r^2 \cdot dm \right) \cdot \omega^2$$

La grandeur intégrale dépend de l'axe de rotation pris pour le solide, et on appelle cette grandeur "moment d'inertie autour de l'axe  $\Delta$ ".

#### 3.2 Matrice d'inertie

##### 3.2.1 Définition

Pour synthétiser les moments d'inertie en fonction de l'axe de rotation, on peut définir pour chaque solide S une **matrice d'inertie** autour d'un point O et dans une base:

$$\bar{I}_{(O,S)} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{R_S} = \begin{pmatrix} \int_V (y^2 + z^2) \cdot dm & - \int_V x \cdot y \cdot dm & - \int_V x \cdot z \cdot dm \\ - \int_V x \cdot y \cdot dm & \int_V (x^2 + z^2) \cdot dm & - \int_V y \cdot z \cdot dm \\ - \int_V x \cdot z \cdot dm & - \int_V y \cdot z \cdot dm & \int_V (x^2 + y^2) \cdot dm \end{pmatrix}_{R_S}$$

On remarque que cette matrice est symétrique, de plus il existe toujours un point et un repère pour lesquels la matrice est diagonale, on appellera cette base **principale d'inertie**.

### 3.2.2 Simplification

Si la géométrie possède certaines propriétés, alors il est possible de simplifier l'écriture de la matrice d'inertie:

**Plan de symétrie:**

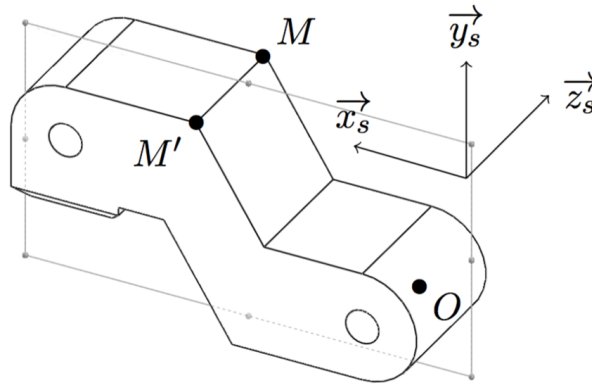


Figure 2: Solide présentant un plan de symétrie.

Si le solide est symétrique par le plan  $(M, \vec{x}_s, \vec{y}_s)$  alors les intégrales hors diagonale contenant  $z$  vont s'annuler, la matrice devient alors:

$$\bar{I}_{(O,S)} = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{R_S}$$

**Axe de révolution:**

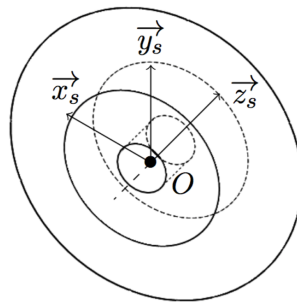


Figure 3: Solide présentant un axe de révolution.

Si un solide possède un axe de révolution  $\vec{z}_s$  (une invariance par rotation autour de cet axe) alors :

- Il possède alors plusieurs plans de symétrie (tous les plans incluant l'axe de révolution), les termes hors diagonaux sont donc nuls
- L'invariance par la rotation d'un quart de tour permet d'obtenir les mêmes résultats pour les intégrales sur  $x$  et  $y$ , donc les grandeurs d'inertie diagonales sur les axes  $\vec{x}_s$  et  $\vec{y}_s$  sont égales.

On obtient alors la matrice d'inertie suivante:

$$\bar{\bar{I}}_{(O,S)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{R_S}$$

Cette matrice permet de calculer les grandeurs cinétiques et dynamiques des solides.

### 3.3 Torseur cinétique

Les grandeurs cinétiques sont des grandeurs de quantité de mouvement : les quantités de masse déplacées. On peut les représenter par un torseur. Elles représentent la quantité  $p = m.v$  pour chaque point matériel, elles dépendent des mouvements et donc du référentiel d'observation du solide.

#### • Torseur cinétique

La quantité de mouvement d'un solide S dans son mouvement dans un référentiel R s'exprime par un torseur:

Avec:

- $m$  : la masse du solide
- $G$  : le centre d'inertie (ou centre de gravité) du solide S
- $\vec{\sigma}$  : le moment cinétique

Le moment cinétique se calcule grâce à la formule:

$$\overrightarrow{\sigma_{A \in S/R}} = m \cdot \overrightarrow{AG} + \bar{\bar{I}}_{(A,S)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

Cela se simplifie au centre de gravité:

$$\overrightarrow{\sigma_{G \in S/R}} = \bar{\bar{I}}_{(G,S)} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

Comme on travail avec des torseurs on retrouve la formule de Varignon:

#### • Formule de Varignon pour les torseurs cinétiques

On donne régulièrement l'inertie sous forme d'une grandeur scalaire  $J$  au point A et non sous forme d'une matrice, on prendra alors :

$$\overrightarrow{\sigma_{A \in S/R}} = J \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

### 3.4 Comoment de torseur

Le comoment de deux torseurs est une opération prenant en entrée deux torseurs et donnant un scalaire en sortie:

- Comoment de deux torseurs

Le comoment de deux torseurs ne dépend pas du point d'écriture des torseurs mais dans le calcul il est nécessaire de vérifier que les torseurs soient bien écrits au même point.  
Le comoment est une opération bilinéaire et symétrique.

### 3.5 Énergie cinétique

L'énergie cinétique représente l'énergie stockée dans un solide grâce à sa mise en mouvement, les mouvements de translation et de rotation contribuent à cette énergie. Cette énergie est une grandeur globale du solide mais dépend du mouvement et donc du référentiel d'observation du mouvement:

- Énergie cinétique

Ce calcul est long à réaliser et se simplifie parfois en :

- Énergie cinétique simplifiée

Avec :

- $m$  : la masse du solide  $S$
- $J$  : l'inertie autour de l'axe de rotation exprimée au point  $G$

## 4 Théorème de l'énergie cinétique

Le Théorème de l'Énergie Cinétique (TEC) est une manière d'obtenir des relations entre les efforts et les accélérations, ce théorème donne les mêmes résultats que le Principe Fondamental de la Dynamique (présenté dans la section 5). Le TEC est une projection sur les champs de vitesse du PFD et permet donc de trouver les liens entre efforts et accélérations mais ne permet pas de déterminer des efforts transmis dans des liaisons ou des effets annexes tels que l'effet gyroscopique.

## 4.1 Énoncé

### • Théorème de l'Énergie Cinétique

Un solide ou un ensemble de solides  $S$  dans son mouvement par rapport à un référentiel  $R$  supposé galiléen voit son énergie cinétique respecter :

Cette expression demande de connaître les puissances venant de l'extérieur d'un ensemble de solides et les puissances venant de l'intérieur. Pour rendre cette équation utile il faudra diviser par la vitesse pour obtenir la relation dynamique voulue.

## 4.2 Calcul des puissances

La puissance en mécanique est la capacité d'une force à permettre un mouvement, la définition de la puissance est :

### • Définition d'une puissance

Soit un solide  $S$  dans son mouvement dans le référentiel  $R$ , une action mécanique de source  $I$  qui s'applique sur le solide  $S$ . La puissance développée par cette action mécanique dans ce mouvement s'écrit :

Cette définition fonctionne dans tous les cas mais dans le cadre de puissances internes il est possible de simplifier les calculs :

On appelle puissances internes les puissances développées par les efforts qui s'appliquent d'un élément intérieur sur un autre élément intérieur (liaisons, pression dans un vérin, couple moteur, ...).

Prenons une action mécanique d'un solide 1 s'appliquant sur un solide 2 et les mouvements de ces solides se font dans un référentiel  $R$ , calculons la somme des puissances s'appliquant sur l'ensemble  $\{1 + 2\}$   $P_{1 \leftrightarrow 2}$  :

$$\begin{aligned} P_{2 \rightarrow 1/R} &= \{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\} \otimes \{\mathcal{V}_{1/R}\} \\ P_{1 \rightarrow 2/R} &= \{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} \otimes \{\mathcal{V}_{2/R}\} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} P_{1 \leftrightarrow 2} &= P_{2 \rightarrow 1/R} + P_{1 \rightarrow 2/R} \\ P_{1 \leftrightarrow 2} &= \{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} \otimes \{\mathcal{V}_{2/R}\} + \{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\} \otimes \{\mathcal{V}_{1/R}\} \end{aligned}$$

La troisième loi de Newton permet d'écrire :

$$P_{1 \leftrightarrow 2} = \{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} \otimes \{\mathcal{V}_{2/R}\} - \{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} \otimes \{\mathcal{V}_{1/R}\}$$

Le comoment étant bilinéaire :

$$P_{1 \leftrightarrow 2} = \{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} \otimes (\{\mathcal{V}_{2/R}\} - \{\mathcal{V}_{1/R}\})$$

$$P_{1 \leftrightarrow 2} = \{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} \otimes \{\mathcal{V}_{2/1}\}$$

On trouve alors qu'une puissance interne ne dépend pas du référentiel choisi.

### • Puissance interne

La puissance totale développée entre des solides  $S_1$  et  $S_2$  est:

Elle ne dépend pas du référentiel choisi.

**Cas des liaisons parfaites :** Les liaisons parfaites peuvent dans chaque direction soit permettre un mouvement, soit transmettre un effort et donc la puissance développée par une liaison parfaite est nulle. Dans le cadre des liaisons non parfaites, il est nécessaire de calculer la puissance perdue dans la liaison (la puissance sera négative).

## 4.3 Méthodes de calcul

Pour résoudre un problème d'énergétique :

- On commence par réaliser un graphe de structure du système.
- On calcule les énergies cinétiques de chacun des solides du système et on calcule  $E_{c,tot/R} = \sum_S E_{c,S/R}$
- Si possible on exprime toutes les vitesses suivant le même paramètre cinématique.
- On calcule les puissances externes  $P = F.V + C.\Omega$
- On calcule les puissances internes des liaisons ( $P = 0$  si les liaisons sont parfaites)
- On calcule les autres puissances internes
- Si on a réussi à exprimer l'énergie cinétique avec un seul paramètre cinématique alors on fait de même avec les puissances
- On applique le TEC et on écrit l'expression obtenue en calculant la dérivée (on n'oublie pas que  $(u^2)' = 2.u.u'$ ).
- On simplifie par le paramètre cinématique pour obtenir l'expression voulue.

## 4.4 Masse et inertie équivalentes

Il est souvent possible d'exprimer l'énergie cinétique d'un système en gardant un seul paramètre cinématique (une vitesse linéaire ou une vitesse angulaire) dans ce cas il est possible d'exprimer toutes les énergies cinétiques comme dépendantes du paramètre cinématique de l'actionneur et les mettre sous une des formes.

$$\begin{cases} E_{c,tot/R} &= \frac{1}{2} \cdot J_{eq} \cdot \omega^2 \\ E_{c,tot/R} &= \frac{1}{2} \cdot M_{eq} \cdot V^2 \end{cases}$$

On appelle les grandeurs  $J_{eq}$  et  $M_{eq}$  les masses et inerties équivalentes du système. Ces paramètres sont la masse ou l'inertie que "voit" réellement l'actionneur (la masse ou l'inertie de toute la chaîne cinématique) et sont fréquemment utilisés lors de l'étude de l'asservissement des systèmes ou le dimensionnement des actionneurs.

## 5 Principe Fondamental de la Dynamique

Lorsqu'un solide n'est plus à l'équilibre dans un référentiel galiléen, alors on applique le Principe Fondamental de la Dynamique.

## 5.1 Énoncé

### • Principe Fondamental de la Dynamique

Dans un référentiel  $R$ , un solide ou un ensemble de solides  $S$  soumis à des actions mécaniques respecte l'expression:

Le nouveau torseur est le torseur dynamique d'un mouvement d'un solide qu'il va falloir déterminer. Il représente les effets de l'accélération sur chaque solide.

## 5.2 Torseur dynamique

Le torseur dynamique d'un solide est défini par:

### • Définition du torseur dynamique

Soit  $S$  un solide dans son mouvement dans un référentiel  $R$ :

Avec :

- $m$  : la masse du solide  $S$ .
- $G$  : le centre d'inertie du solide  $S$ .
- $\vec{\delta}$  : le moment dynamique.

**Calcul des termes** On peut calculer la résultante dynamique en ayant une masse constante:

$$\left[ \frac{d(m \cdot \vec{V}_{G \in S/R})}{dt} \right]_R = m \cdot \vec{\Gamma}_{G \in S/R}$$

Le calcul du moment dynamique se fait:

$$\vec{\delta}_{M \in S/R} = \left[ \frac{d\vec{\sigma}_{M \in S/R}}{dt} \right]_R + \vec{V}_{M \in S/R} \wedge \vec{V}_{G \in S/R}$$

Qui se simplifie au centre de gravité :

$$\vec{\delta}_{G \in S/R} = \left[ \frac{d\vec{\sigma}_{G \in S/R}}{dt} \right]_R$$

Ce qui est pertinent car le moment cinétique est plus facilement calculable au centre d'inertie.

## 5.3 Méthode de calcul

Une étude en dynamique est quasi identique à une étude en statique:

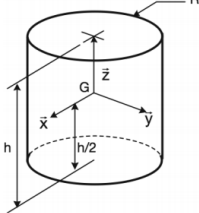
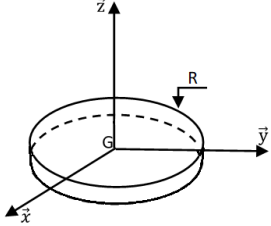
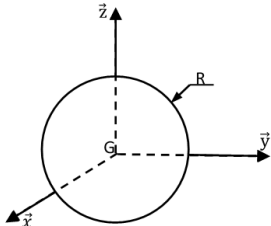
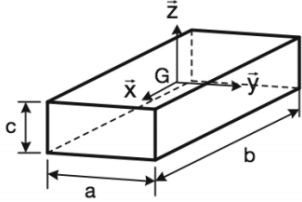
- On commence par faire un graphe de structure,

- On choisit le solide (ou le groupe de solides) à isoler.
- On effectue le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures au solide isolé et on liste tous les torseurs d'action mécaniques
- On calcule le torseur dynamique du solide. (Dans le cadre d'un groupe de solides on calcule chaque torseur dynamique)
- On déplace tous les torseurs en un même point
- On utilise le PFD pour déterminer 6 équations utiles

Dans le cadre de systèmes à chaînes fermées, il est recommandé d'isoler les solides un par un pour déterminer les efforts dans les liaisons. Pour les chaînes ouvertes il est plus pertinent de faire des isolements larges puis de réduire à chaque fois pour déterminer les efforts liaison par liaison.

On garde les mêmes méthodes de choix de point de réduction des torseurs que lors des études d'équilibres statiques car elles fonctionnent très bien.

## 6 Matrices d'inertie usuelles

| Forme de solide                                                                     | Matrice d'inertie                                                                                                                                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    | $\bar{\bar{I}}_{(G,S)} = \begin{pmatrix} m \cdot \left( \frac{R^2}{4} + \frac{l^2}{12} \right) & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \left( \frac{R^2}{4} + \frac{l^2}{12} \right) & 0 \\ 0 & 0 & m \cdot \frac{R^2}{2} \end{pmatrix}$ |
|    | $\bar{\bar{I}}_{(G,S)} = \begin{pmatrix} m \cdot \frac{R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \frac{R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & m \cdot \frac{R^2}{2} \end{pmatrix}$                                                                 |
|   | $\bar{\bar{I}}_{(G,S)} = \begin{pmatrix} 2m \cdot \frac{R^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 2m \cdot \frac{R^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2m \cdot \frac{R^2}{5} \end{pmatrix}$                                                              |
|  | $\bar{\bar{I}}_{(G,S)} = \begin{pmatrix} m \cdot \frac{b^2+c^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \frac{a^2+c^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m \cdot \frac{a^2+b^2}{12} \end{pmatrix}$                                                  |