



Objectif : L'objectif de ce cours est de mettre en place les **outils de modélisation** permettant une **analyse cinématique** (statique, dynamique ...) des **mécanismes**. Il permettra aussi de décrire la géométrie des différents systèmes et trouver des relations entre les paramètres d'entrée et de sortie

1 Solides indéformables

Dans le cadre de l'étude mécanique des systèmes, nous étudierons exclusivement des solides indéformables (sauf cas explicitement contraire). Il est indispensable de bien définir cette notion

Solide : Un solide est un ensemble de points matériels composant un système matériel.

Solide indéformable : Un solide S est dit indéformable si, quelque soit le mouvement qu'il effectue, on peut prendre n'importe quels points matériels A et B et que :

$$\forall A, B \in S, \forall t \quad ||\overrightarrow{AB}|| (t) = \text{constante}$$

(ce qui signifie que la distance entre les points A et B ne varie pas en fonction du temps).

2 Repère et référentiel

Pour définir la position d'un point dans l'espace on utilise des repères et, pour les études cinématiques et dynamiques, des référentiels. On travaillera dans des espaces en trois dimensions mais malheureusement, ce cours étant en 2D les figures se feront en 2D mais illustreront au mieux les différents éléments.

2.1 Vecteur

2.1.1 Définition

Un vecteur est un outil mathématique permettant de représenter de nombreuses quantités mécaniques entre autres. Il se représente par une flèche: On définit un vecteur par 3 caractéristiques:

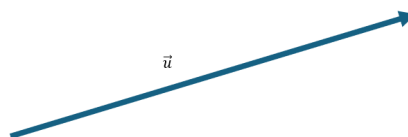


Figure 1: Exemple d'un vecteur $\vec{u}$

- Sa direction : une droite de l'espace qui portera le vecteur.
- Son sens : On choisit un des deux côtés de la droite.
- Sa norme : La "longueur du vecteur" il représente la valeur de la grandeur représentée.

Il est aussi possible de définir un vecteur entre deux points, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur partant du point A et arrivant sur le point B

2.1.2 Opération mathématique

Le vrai intérêt des vecteurs se situe dans les équations mathématiques que nous pouvons en tirer, il est nécessaire pour cela de voir quelques opérations mathématiques possibles.

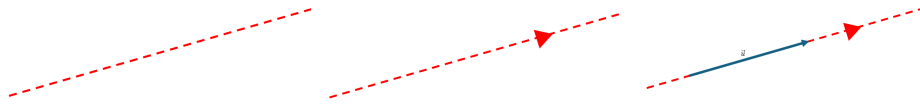


Figure 2: Création d'un vecteur (direction, sens, norme)

Somme : On peut additionner des vecteurs en mettant bout à bout les vecteurs et en partant du début du premier et en arrivant au bout du dernier.

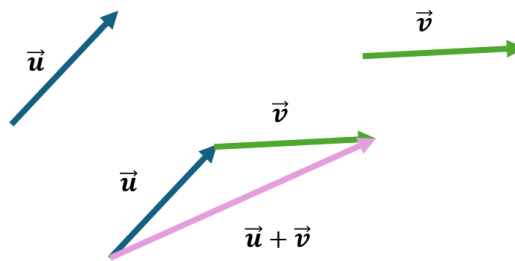


Figure 3: Somme de deux vecteurs

Multiplication par un réel : On peut multiplier un vecteur par un réel, pour cela on multiplie sa norme par le réel.

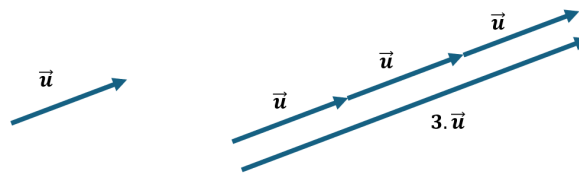


Figure 4: Multiplication d'un vecteur par un réel positif

Dans le cadre d'un réel négatif on inverse aussi le sens du vecteur.

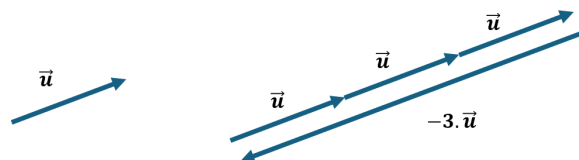


Figure 5: Multiplication d'un vecteur par un réel négatif

Relation de Chasles La relation de Chasles ne fonctionne que pour les vecteurs définis entre deux points. On peut alors écrire :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Attention : il faut bien vérifier que le point d'arrivée du premier vecteur et de départ du second vecteur sont les mêmes.

2.2 Repères

On place des repères afin de définir les vecteurs et les positions.

Grâce aux propriétés de somme et de multiplication des vecteurs, il est possible de définir des vecteurs de bases (très souvent $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$). Ainsi un vecteur $\vec{u}$ peut se définir comme un réel fois le vecteur $\vec{x}$ plus un réel fois le vecteur $\vec{y}$... On appelle **base** le duo ou trio de vecteurs permettant de définir le vecteur $\vec{u}$ et **coordonnées** les réels multipliant les vecteurs.

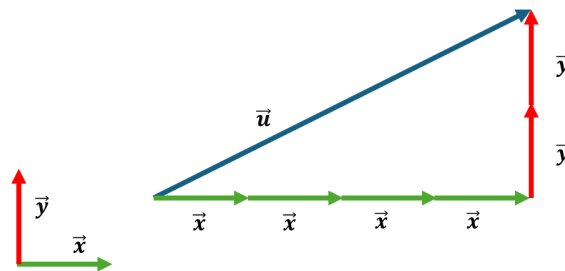


Figure 6: Exemple d'une base: $\vec{u} = 4.\vec{x} + 2.\vec{y}$

Les vecteurs n'étant pas localisés, on peut définir un point d'origine pour définir des positions. On note le repère R composé de la base contenant les vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ et avec le point O pour origine : $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Un vecteur $\vec{u}$ peut s'écrire de deux façons différentes dans le repère R :

- Écrire le vecteur en ligne:

$$\vec{u} = a.\vec{x} + b.\vec{y} + c.\vec{z}$$

- Écrire le vecteur en colonne:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_R$$

Il est important de préciser le repère utilisé car nous utiliserons de nombreux repères en même temps.

Exemple : Le vecteur $\vec{u}$ de la figure 6 s'écrit:

$$\vec{u} = 4.\vec{x} + 2.\vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_R$$

Les opérations mathématiques se font de manière simples, les sommes se font lignes par lignes. La multiplication par un réel se fait de la même façon.

La position d'un point A est alors définie par le vecteur $\vec{OA}$ et permet de placer les différents points.

2.2.1 Pour la mécanique

Pour les études de cette année en mécanique, tous nos repères seront dit orthonormés directs. Cela veut dire que nos vecteurs de bases sont perpendiculaires entre eux (ortho), de longueur 1 (sans unité, ils sont normés) et dans un sens précis (direct)

2.3 Référentiel

Un référentiel est un repère associé à une mesure temporelle. Par défaut on se placera dans un référentiel lié à la terre. Cette mesure temporelle ne sera pas importante pour ce cours mais sera utilisée pour définir la vitesse et l'accélération dans les prochains centres d'intérêts.

3 Mouvement possible et écriture de torseur cinématique

3.1 Mise en évidence des mouvements possibles

L'objectif de ce cours est d'étudier les mouvements possibles des solides, pour cela regardons un exemple simple en 2D avec 2 points:

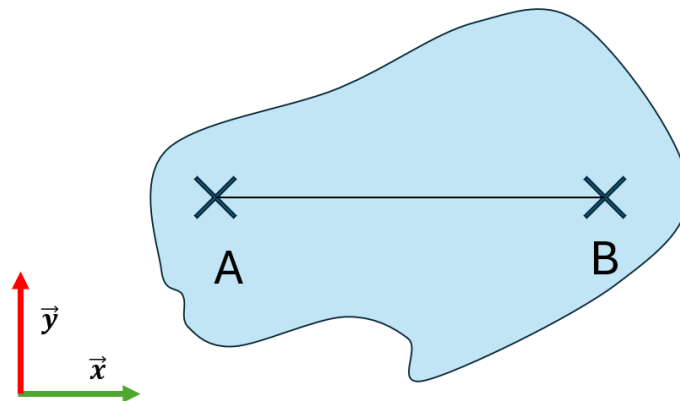


Figure 7: Patatoïde avec 2 point A et B et un repère

Les mouvement de chacun des points peut se décomposer comme un mouvement sur la direction $\vec{x}$ et un mouvement $\vec{y}$. Regardons les mouvements possibles sur $\vec{x}$:

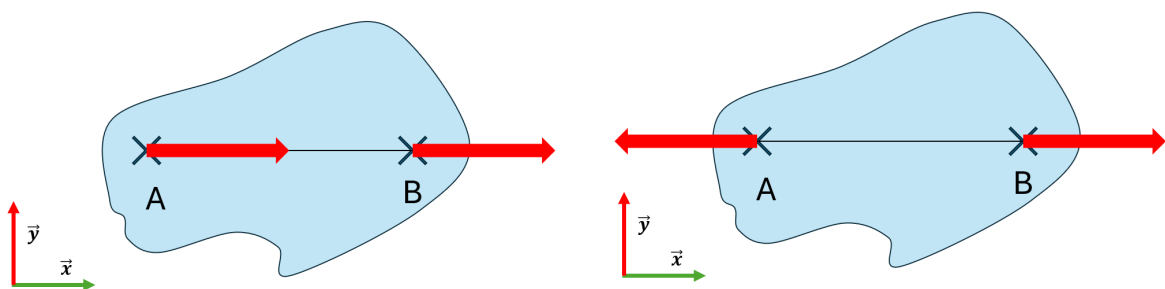


Figure 8: Mouvement des points A et B sur l'axe X, dans le même sens puis dans des sens contraire

Le premier cas montre une translation sur $\vec{x}$, le mouvement est possible. Le second cas montre une élongation du solide, nous travaillons avec des solides indéformables et donc il est impossible de réaliser ce mouvement.

Regardons les mouvements possibles sur $\vec{y}$: Le premier cas montre une translation sur $\vec{y}$, le mouvement

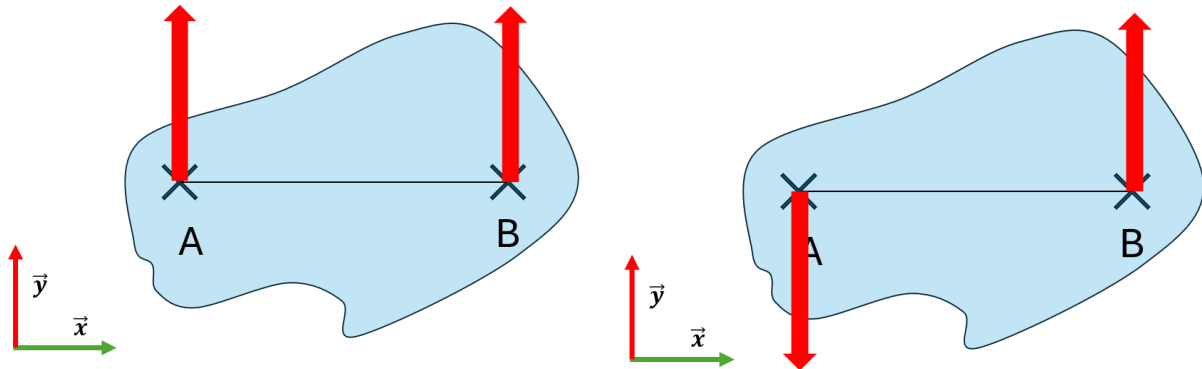


Figure 9: Mouvement des points A et B sur l'axe Y, dans le même sens puis dans des sens contraire

est possible. Le second cas montre une rotation du solide.

En conclusion, les mouvements possibles des solides indéformables sont les translations (sur chacun des trois axes) et les rotations autour des trois axes (le cas 2D ne permet d'illustrer que la rotation autour de l'axe $\vec{z}$).

3.2 Généralités sur les torseurs

Les mouvements sont représentés dans un outil mathématique nommé **torseur**. Un torseur est un outil de représentation des champs vectoriels, nous en croiserons de 4 types cette année.

Un torseur s'écrit de la façon suivante:

$$\{\mathcal{V}_{i/j}\}_D = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_D \end{Bmatrix}$$

- $\{\mathcal{V}_{i/j}\}$ représente le type de torseur (ici il s'agit du torseur représentant le champs de vitesse entre les solides i et j)
- D est le point d'écriture ou point de réduction du torseur, un torseur est une représentation localisée d'un champs de vecteur: sur un vinyle le centre et un point de l'extérieur ne vont pas à la même vitesse mais appartiennent au même champs de vitesses.
- $\vec{R}$ est la **résultante** du torseur, il s'agit d'une quantité vectorielle qui ne dépend pas du point d'écriture.
- $\vec{M}_D$ est le **moment au point D** du torseur, c'est une quantité vectorielle qui dépend du point d'écriture du torseur.

On doit retrouver ces attributs dans tout les torseurs écrits cette année. (**Notamment le point d'écriture: "Un torseur sans point c'est une question qui ne vaut pas de point"**)

Il existe deux façons d'écrire un torseur, l'écriture déjà décrite est l'écriture dite "en ligne" du torseur. Il est possible d'écrire les deux vecteurs composants le torseur en colonne:

$$\{\mathcal{V}_{i/j}\}_D = \begin{Bmatrix} R_x & M_{D,x} \\ R_y & M_{D,y} \\ R_z & M_{D,z} \end{Bmatrix}_{R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Les deux vecteurs sont écrits en colonne dans la même base R. Il est important de préciser la base d'écriture dans le cas de l'écriture en colonne du torseur.

3.3 Torseur cinématique

Pour ce premier cours, le torseur cinématique nous servira à noter les mouvements possibles entre deux solides. La résultante représente les mouvements de rotation possible : une composante sur $\vec{x}$ dans la résultante montre que les solides peuvent tourner l'un par rapport à l'autre autour de l'axe $\vec{x}$. Le moment montre la vitesse de translation entre les solides, si une composante sur $\vec{x}$ est présente dans le moment alors **en ce point (celui d'écriture du torseur)** les solides peuvent translater sur la direction $\vec{x}$.

Le torseur cinématique représente donc les mouvements entre deux solides (i et j) il se note :

$$\{V_{i/j}\}$$

Et on le lit "les mouvement du solide i dans son mouvement par rapport au solide j"

4 Surface de contact entre les solides

On parle de contact entre solides dès lors qu'ils se touchent. Il est alors nécessaire de regarder les surfaces en contact afin de déterminer les mouvements possibles entre ces solides. On dénombre trois formes de surfaces en contact: les plans, les cylindres et les sphères (on peut trouver des surfaces plus complexes mais on se rapportera toujours à ces trois formes):

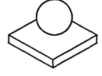
	Plan	Cylindre		sphère
Plan	 contact surfacique			
Cylindre	 contact linéique	 contact linéique	 contact surfacique	
Sphère	 contact ponctuel	 contact linéique circulaire		 contact ponctuel  contact surfacique

Figure 10: Tableau montrant les surfaces et les zones de contact.

5 Liaisons cinématiques

Pour l'étude des différents mécanismes, il est nécessaire de modéliser les différents contacts en une représentation utilisable, on nomme la modélisation du contact entre deux solides "liaison entre les solides", chaque liaisons se définit par les surfaces de contacts et permet de déduire les mouvements autorisés (mais pas forcément réalisé)s entre les deux solides. Chaque type de liaison est associé à un torseur cinématique représentant les mouvements possibles, à une représentation schématique pour dessiner le système dans un schéma cinématique (nous y reviendrons) et si besoin, une localisation et une orientation.

Les contacts vu précédemment permettent de définir six liaisons :

Nom de la liaison	Surfaces en contact	Torseur cinématique	Représentation schématique
Appui plan	Plan/Plan		
Linéaire rectiligne	Cylindre/Plan		
Pivot glissant	Cylindre/Cylindre (intérieur)		
Ponctuelle	Sphère/Plan		
Linéaire annulaire	Sphère/Cylindre (intérieur)		
Sphérique (Rotule)	Sphère/Sphère (intérieur)		

Figure 11: Tableau des liaisons élémentaires

Néanmoins, certaines associations de surfaces en contacts sont aussi normalisées car extrêmement courantes, on définit alors les cinq autres liaisons:

Nom de la liaison	Surfaces en contact	Torseur cinématique	Représentation schématique
Encastrement	3 contacts Plan/Plan orthogonaux		
Pivot	Cylindre/Cylindre (intérieur) + 1 contact Plan/Plan orthogonal à l'axe du cylindre		
Glissière	2 Contacts Plan/Plan non parallèle		
Hélicoïdale	Nombreux contacts ponctuels le long d'une hélice		
Sphérique à doigt	Sphère/Sphère (intérieur) + 1 contact Plan/Plan dans un plan contenant le centre de rotation		

Figure 12: Tableau des liaisons composées.

6 Graphes de liaisons et schémas cinématiques

Une photo d'un système est rarement utile pour le modéliser, pour cela on utilise deux outils, le graphe de liaison et le schéma cinématique.

6.1 Graphe de liaisons

Pour représenter les contacts on commence par tracer un graphe représentant les classes d'équivalence cinématique et les liaisons entre elles. Une classe d'équivalence cinématique est un ensemble de solide en liaisons encastrement entre eux, on peut les considérer comme un seul gros solide.

Un graphe de liaisons est un graphe dont les sommet (des ronds) sont les ensembles de solides et les arêtes (des arcs reliant les ronds) sont les liaisons.

Voici un exemple:

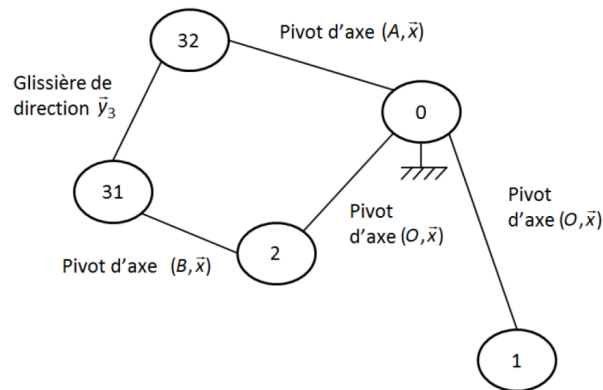


Figure 13: Exemple de graphe de liaison.

6.2 Schéma cinématique

Pour représenter la cinématique d'un système on peut représenter les liaisons en 2D ou en 3D à l'aide d'un schéma des liaisons dans l'espace.

Voici un exemple :

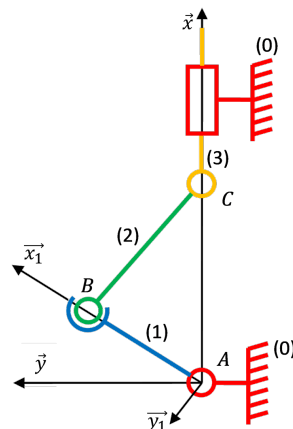


Figure 14: Exemple de schéma cinématique.

Pour cela on suit la méthode suivante:

- On place les points où sont situés les liaisons.
- On place les dessins des liaisons bien orientés, on associe à chaque classe d'équivalence une couleur.
- On trace les solides en reliant les liaisons entre elles (en respectant les couleurs)
- On place le petit râteau sur le bâti, il s'agit de la pièce de référence considérée comme immobile.

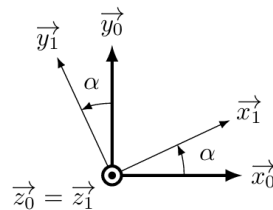
7 Repérage des solides et paramétrages

Pour définir la position des solides on colle à chacun un repère, de préférence en suivant la géométrie du solide. Pour repérer la position et l'orientation des solides les uns par rapports aux autres, on définit des paramètres variables permettant de placer les différents repères de solides entre eux. La position d'un solide se définit par le vecteur partant de l'origine du repère du solide de référence et arrivant à l'origine du repère du solide à paramétrer. Pour définir l'orientation du solide on utilise une figure géométrale, c'est une figure montrant la rotation entre deux repères.

Pour faire une figure géométrale:

- On commence par trouver l'axe commun aux deux repères et on le trace venant vers nous
- On place les deux autres axes (en gardant à l'esprit que nos repères sont orthonormés direct et donc que x , y et z se suivent en lisant le sens direct)
- On place le second repère en gardant un petit angle de rotation (même si il est grand dans la réalité)
- On définit l'angle de rotation

Ce qui donne par exemple:



l'angle α ainsi définit s'écrit:

$$\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$$

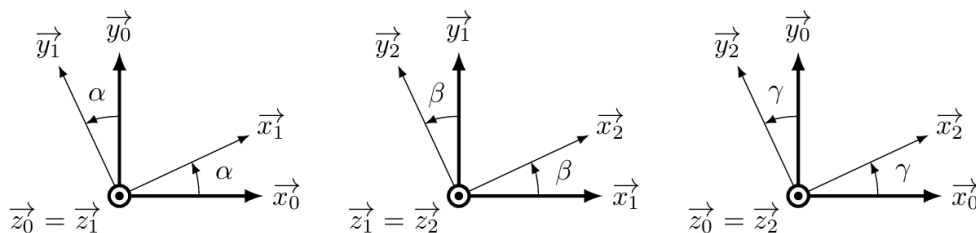
On peut alors en donnant les valeurs de chacun des paramètres, positionner chaque solide puis l'orienter.

8 Relation entre les paramètres et fermetures géométriques

Si le graphe de liaison de notre système forme une boucle alors les solides ne peuvent pas bouger librement, il existe des façons de bouger pour le système qu'on nomme **mobilité**. Cela traduit que des relations entre les paramètres existent et qu'en en fixant certains alors il n'existe qu'une unique possibilité pour les autres, l'objectif de cette partie est de pouvoir déterminer les relations entre les solides.

8.1 Fermeture angulaire

Les angles donnés peuvent donner la première relation entre les paramètres, en effet il est possible de réaliser des équations en utilisant des résultat similaire à la relation de Chasles si les repères tournent autour du même axe par exemple:



$$\alpha + \beta = \gamma$$

On peut facilement le lire en traçant les trois repères sur la même figure.

8.2 Fermeture géométrique

Dans le cas où le graphe de structure présente une boucle, il est possible d'écrire une relation de Chasles avec des points du système faisant une boucle, grâce à cela on obtient une équation vectorielle qu'il est difficile de traiter.

Pour obtenir des équations dites scalaires et utilisables il faut projeter l'équation pour cela il existe deux méthodes qui reviennent à faire la même chose.

8.2.1 Décomposition des vecteurs (méthode lente)

La décomposition de vecteur se fait en disant:

$$\vec{x}_1 = X.\vec{x} + Y.\vec{y}$$

l'objectif est de trouver les valeurs de X et de Y

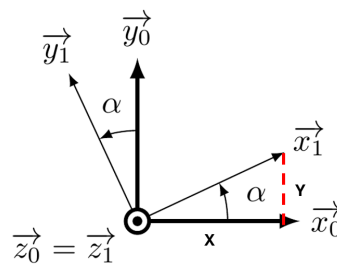


Figure 15: Décomposition du vecteur $\vec{x}_1$.

Le triangle qu'on observe est rectangle, on peut donc utiliser les formules de trigonométrie:

$$\cos(\theta) = \frac{X}{\|\vec{x}_1\|} = X$$

$$\sin(\theta) = \frac{Y}{\|\vec{x}_1\|} = Y$$

On trouve donc une nouvelle écriture de $\vec{x}_1$:

$$\vec{x}_1 = \cos(\theta).\vec{x} + \sin(\theta).\vec{y}$$

Et on peut recommencer pour tout les vecteurs pour trouver des équations.

8.2.2 Produit scalaire (méthode plus rapide)

Le produit scalaire est une application symétrique bilinéaire prenant en entrée deux vecteurs et donnant en sortie un nombre réel. Il se note $\vec{u}.\vec{v}$

Ce qui veut dire:

$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos((\vec{u}, \vec{v}))$$

La bilinéarité donne de plus:

$$(\alpha.\vec{u} + \vec{v}).\vec{w} = \alpha.(\vec{u}.\vec{w}) + (\vec{v}.\vec{w})$$

Dans la réalité le produit scalaire permet de projeter une équation sur une direction, la valeur d'un produit scalaire de deux vecteurs peut se trouver grâce aux figures géométrales: la projection d'un vecteur d'un vecteur sur un autre sonne rapidement le résultat:

- la projection d'un vecteur sur un autre perpendiculaire donne 0.
- la projection d'une grande longueur d'un vecteur sur un autre donne le cosinus de l'angle entre les vecteurs.

- la projection d'une petite longueur d'un vecteur sur un autre donne le sinus de l'angle entre les vecteurs.

Si les vecteurs sont dans le même sens alors le signe est positif et négatif si les vecteurs sont dans des sens contraires.

8.3 Traitement des équations

Les méthodes précédentes permettent d'obtenir deux ou trois équations scalaires par fermetures géométriques, mais souvent il y a trop de paramètre et il est nécessaire de combiner les équations pour en trouver une utile. Pour supprimer les paramètres il existe plusieurs méthodes à connaître:

- pour supprimer des angles dans les équations on utilise l'équation trigonométrique $\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$
- pour supprimer les longueurs, on divise les équations en ayant isolé cette longueur afin de trouver rapidement un résultat, cela donne un calcul de tangente.

En utilisant ces méthodes on obtient une relation entrée sortie entre les paramètres voulues.

9 Application sur un système

Afin de s’entraîner sur un cas simple, on étudie le mécanisme d’une scie sauteuse. Une scie sauteuse est un outils de bricolage permettant, grâce au mouvement de translation alternatif d’une lame dentée, de couper différentes planches et plaques.

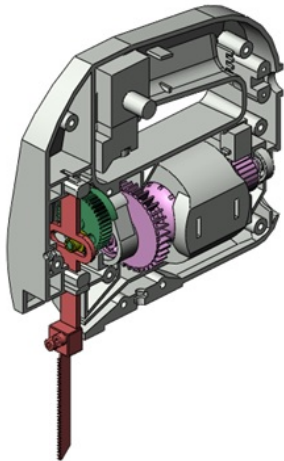


Figure 16: Objet de notre étude.

Voici le plan technique avec les différentes classes d’équivalences cinématiques coloriées.

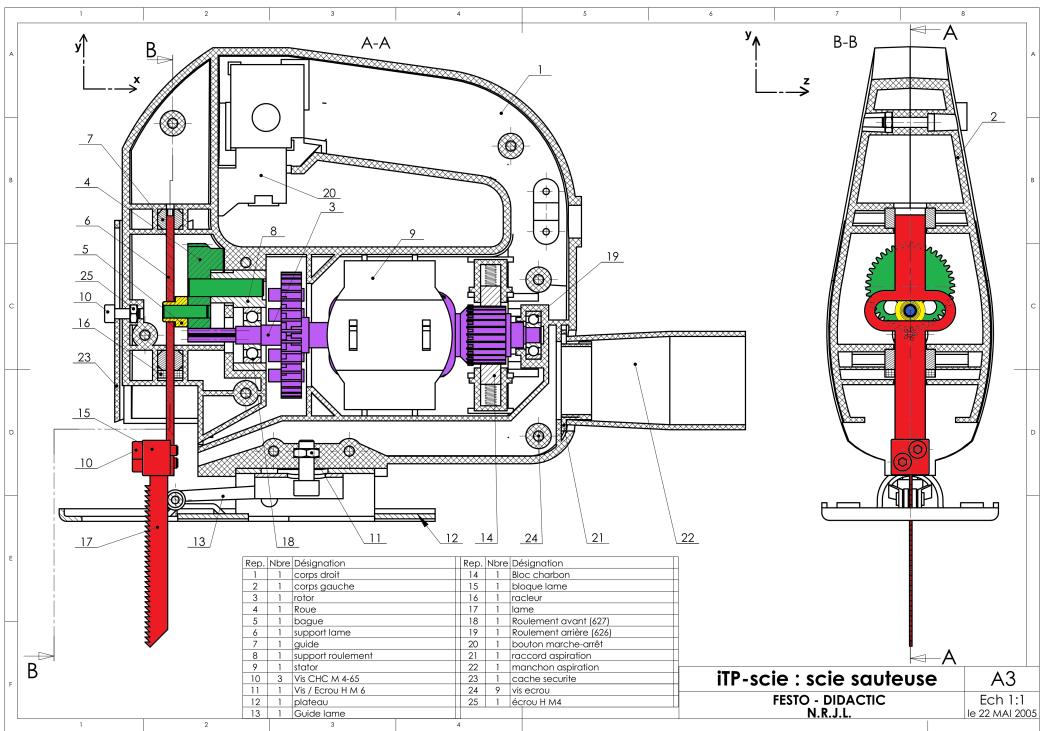


Figure 17: Vue coloriée de la scie sauteuse.

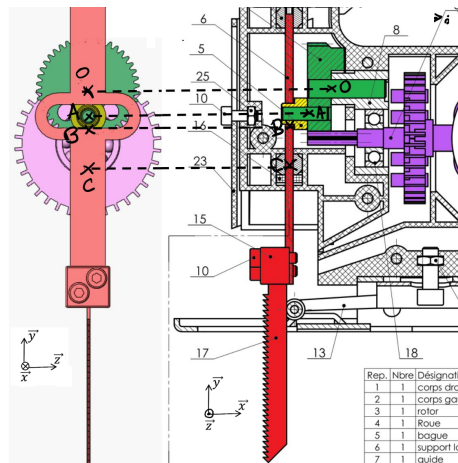


Figure 18: Vue coloriée de la scie sauteuse et position des points de contacts.

• Travail à réaliser

En analysant les surfaces en contact, réalisez un graphe de liaisons du système (On ne prendra pas en compte la CEC violette).

• Travail à réaliser

En utilisant le graphe de liaison, réalisez un schéma cinématique du système.

On pose maintenant le paramétrage suivant:

- La rotation de la pièce verte par rapport à la pièce sera paramétrée par l'angle $\theta_1 = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$
- la position de la bague jaune (2) se caractérise par $\vec{OA} = R \cdot \vec{z}_1$
- la position du contact entre la bague jaune et la lame rouge : $\vec{AB} = r \cdot \vec{y}_0$
- la position de la lame par rapport au bâti se définit par: $\vec{BC} = \lambda_2 \cdot \vec{y}_0 + \lambda_1 \cdot \vec{z}_0$
- la géométrie du bâti donne $\vec{OC} = h \cdot \vec{y}_0$

• **Travail à réaliser**

- Tracer la figure géométrale permettant de définir l'angle θ_1
- Écrire la relation de Chasles reliant les vecteurs. $\vec{OC}$, $\vec{OA}$, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
- Par la méthode voulue, écrire les deux équations à partir de cette relation de Chasles.
- Trouver la relation entre θ_1 et λ_1 .
- Trouver la relation entre θ_1 et λ_2 .
- Trouver la relation entre λ_1 et λ_2 .