



Objectif : L'objectif de ce cours est de définir et modéliser les actions mécaniques s'appliquant sur les solides puis d'étudier l'équilibre statique issu des lois de Newton. L'objectif de ces études est de déterminer les contraintes les plus élevées dans les solides afin de les dimensionner.

1 Généralités et rappels.

1.1 Solide indéformable

Un solide est un ensemble de points matériels composant un système matériel. Il est dit indéformable si:

$$\forall A, B \in S, \forall t \quad ||\overrightarrow{AB}|| (t) = \text{constante}$$

1.2 Repère et référentiel

On définit un repère comme une base de vecteurs (3 vecteurs formant une base orthonormée directe permettant de définir d'autres vecteurs) à laquelle on associe un point d'origine. Chaque solide se voit associé un repère. Un référentiel est un repère auquel on a associé une mesure du temps.

1.3 Paramétrage

Pour repérer un solide par rapport à un autre dans le temps, on doit paramétrer la position du repère du premier solide dans le repère du second et son orientation: on définit donc les positions (x, y et z) du point d'origine du repère à paramétrer puis on définit les rotations grâce à des figures de changement de bases.

1.4 Torseurs

Un torseur est un outil mathématique permettant de représenter un champ vectoriel, il s'écrit en un point donné et se compose de deux vecteurs: la résultante (invariante du point de l'espace choisi pour écrire le torseur) et un moment (variable en fonction du point choisi):

$$_M \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\text{Résultante}} \\ \overrightarrow{\text{Moment en } M} \end{array} \right\}$$

2 Hypothèses générales

Pour toutes les études d'équilibre statique ou de comportement en dynamique d'un système, nous nous placerons dans les conditions suivantes:

- Les solides étudiés seront supposés indéformables (à l'exception des ressorts que nous n'isolons pas)
- Le référentiel utilisé sera considéré comme galiléen.
 - La définition d'un référentiel galiléen est récursive : Il s'agit d'un référentiel dans lequel les lois de Newton s'appliquent ou un référentiel en mouvement de translation à vitesse constante par rapport à un autre référentiel galiléen.
 - Pour nos échelles de vitesse, de temps, et d'espace : Le référentiel terrestre sera considéré galiléen

Ces hypothèses ont des limites:

- Tous les solides sont déformables dès qu'ils subissent un effort, on choisira de négliger ces déformations
- La notion de référentiel galiléen est assez subjective, aucun référentiel n'est réellement galiléen mais les écarts sont imperceptibles.

3 Action mécanique

3.1 Définition

Une action mécanique est un phénomène physique qui a pour but de déplacer ou déformer de la matière. On distingue les actions dites de contact et celles dites à distance.

Les actions de contact sont par exemple les forces de pression de contact ou les actions de pression d'un fluide.

Les actions à distance sont les actions sans contact telles que la gravité ou les actions magnétiques.

On différencie une force qui est une action qui veut déplacer en ligne droite et un couple qui est une action qui veut faire tourner la matière.

3.2 Modélisation d'une action mécanique

Une action mécanique se modélise par un vecteur, une force est orientée et avec une intensité variable. Une force, bien que voulant "aller en ligne droite" va aussi créer un effet qui va chercher "à faire tourner" la matière.

On note l'effort d'une source S sur le solide i : $\overrightarrow{F_{S \rightarrow i}}$. Chaque effort possède un point d'application, c'est le point de référence pour la modélisation de l'effort.

3.3 Moment d'une force

Le moment d'une force par rapport à un point est la capacité d'une force à induire un mouvement de rotation autour d'un axe.

Le vecteur moment de la rotation imposée par cette force est :

$$\overrightarrow{M_{K, S \rightarrow i}}$$

- Perpendiculaire au plan créé par la force et le vecteur partant du point d'application de la force et arrivant au point de mesure du moment
- Proportionnel au bras de levier (distance projetée perpendiculaire au moment et à la force) et à l'effort.

La définition du moment de l'effort $\overrightarrow{F_{S \rightarrow i}}$ appliqué au point O observé au point K est :

$$\overrightarrow{M_{O, 1 \rightarrow 2}} = \overrightarrow{KO} \wedge \overrightarrow{F_{S \rightarrow i}}$$

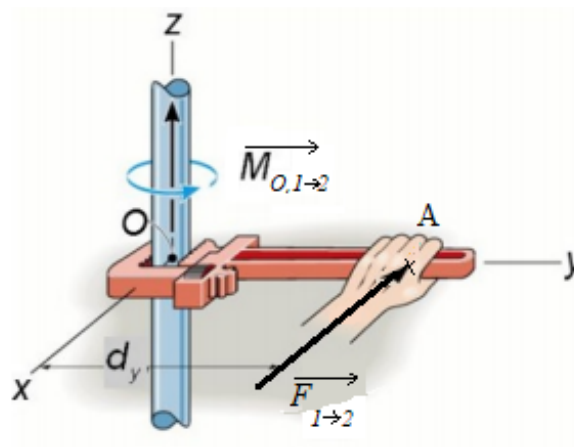


Figure 1: Illustration du moment d'une force.

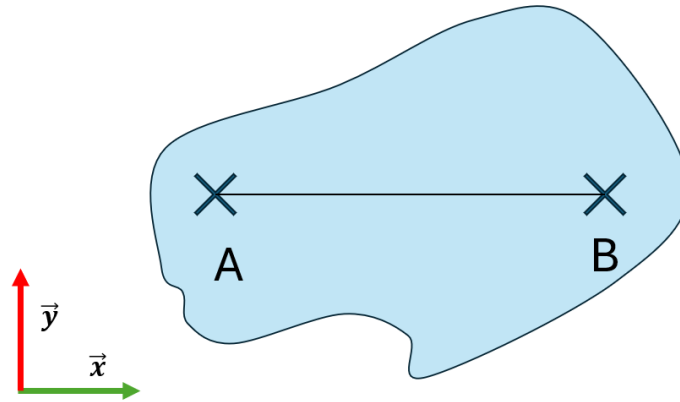


Figure 2: Solide avec les points A et B

Retour de la formule de Varignon: Prenons un solide i sur lequel nous prenons deux points A et B:
On applique sur le solide un effort $\overrightarrow{F_{S \rightarrow i}}$ en O, on calcule les moments en A et en B:

$$\begin{cases} \overrightarrow{M_{A,S \rightarrow i}} = \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{F_{S \rightarrow i}} \\ \overrightarrow{M_{B,S \rightarrow i}} = \overrightarrow{BO} \wedge \overrightarrow{F_{S \rightarrow i}} \end{cases}$$

En décomposant le vecteur $\overrightarrow{BO}$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{M_{A,S \rightarrow i}} = \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{F_{S \rightarrow i}} \\ \overrightarrow{M_{B,S \rightarrow i}} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO}) \wedge \overrightarrow{F_{S \rightarrow i}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{M_{A,S \rightarrow i}} = \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{F_{S \rightarrow i}} \\ \overrightarrow{M_{B,S \rightarrow i}} = \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{F_{S \rightarrow i}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{F_{S \rightarrow i}} \end{cases}$$

On obtient la formule:

• **Formule de Varignon**

$$\forall A, B \in i : \overrightarrow{M_{B,S \rightarrow i}} = \overrightarrow{M_{A,S \rightarrow i}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{F_{S \rightarrow i}}$$

3.3.1 Action mécanique globale

Dans la section précédente nous avons défini deux quantités vectorielles:

- La force $\overrightarrow{F}$, invariante du point d'observation de l'effort (il est parfois noté $\overrightarrow{R}$ car nommé résultante)
- Le moment $\overrightarrow{M}$ de la force F , qui lui dépend du point d'observation et qui respecte la formule de Varignon.

Ces deux quantités permettent de modéliser les actions mécaniques par l'outil mathématique torseur:

• **Torseur d'action mécanique**

L'action mécanique d'une source S sur un solide i se note:

$$\{\mathcal{T}_{S \rightarrow i}\}_K = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{S \rightarrow i}} \\ \overrightarrow{M_{K,S \rightarrow i}} \end{array} \right\}$$

La formule de Varignon permet de déplacer le torseur, pour cela:

- La résultante (la ligne supérieure) ne change pas.
- On calcule grâce à la formule de Varignon le moment au nouveau point d'écriture du torseur et c'est la grandeur à changer.

• Changement d'écriture de point d'un torseur d'action mécanique

L'action mécanique d'une source S sur un solide i se note:

$$\{\mathcal{T}_{S \rightarrow i}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{S \rightarrow i}} \\ \overrightarrow{M_{A, S \rightarrow i}} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{S \rightarrow i}} \\ \overrightarrow{M_{B, S \rightarrow i}} = \overrightarrow{M_{A, S \rightarrow i}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{F_{S \rightarrow i}} \end{array} \right\}$$

3.3.2 Action mécanique locale

La plupart des actions mécaniques ne sont pas localisées en un point, elles sont réparties sur une zone et la représentation globale est une représentation de la somme de toutes les actions locales des efforts.

Il est possible de calculer la représentation globale d'une action mécanique définie localement en intégrant sur tout le domaine de définition les contributions des résultantes et des moments.

• Modèle global d'action mécanique locale

On définit $\overrightarrow{dFm}(M)$ l'effort réparti sur le domaine, il n'est pas forcément constant sur le domaine et il faudra donc le sommer pour tous les points M composant le domaine de définition de l'effort.

$$\{\mathcal{T}_{S \rightarrow i}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{S \rightarrow i}} = \int_{\text{Domaine}} \overrightarrow{dFm}(M) \\ \overrightarrow{M_{O, S \rightarrow i}} = \int_{\text{Domaine}} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dFm}(M) \end{array} \right\}$$

3.3.3 Méthode de calcul - Intégrale sur un domaine

Le calcul des intégrales se fait en plusieurs étapes:

- Définir le domaine d'intégration (ligne, volume ou surface):
 - Si le domaine est une ligne, l'effort local sera de la forme: $\overrightarrow{dFm}(M) = K \cdot \vec{u} \cdot dl$. On intègre alors sur une dimension, il faudra donner les bornes du paramètre de définition de la ligne
 - Si le domaine est une surface, l'effort local sera de la forme: $\overrightarrow{dFm}(M) = K \cdot \vec{u} \cdot dS$. On intègre sur deux dimensions (on aura donc une intégrale double), il faudra donner les bornes des deux paramètres définissant la surface.
 - Si le domaine est un volume, l'effort local sera de la forme: $\overrightarrow{dFm}(M) = K \cdot \vec{u} \cdot dV$. On intègre sur trois dimensions (on aura donc une intégrale triple), il faudra donner les bornes des trois paramètres définissant le volume.
- On définit bien l'élément intégrable (dl, dS ou dV), on le trouve en faisant varier les paramètres définissant la position du point M glissant dans tout le domaine.
- On écrit les intégrales en respectant les bornes d'intégration successives (on doit être capable de mettre une parenthèse entre chaque intégrale et le dX).
- On calcule les intégrales une par une afin de trouver le torseur d'action mécanique.

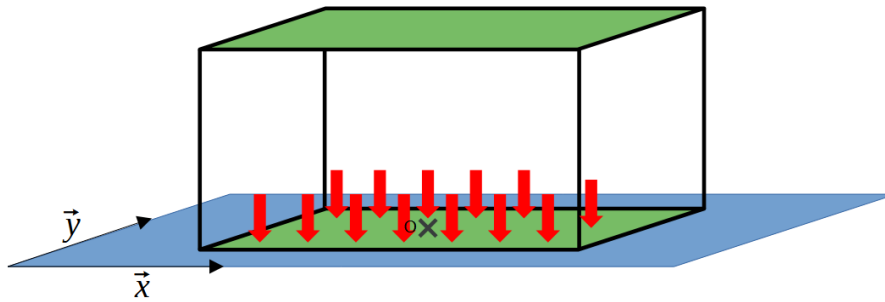


Figure 3: Solide posé sur un autre.

Exemple de domaine Un exemple possible pour une surface d'effort:

On étudie un solide pesant sur un autre, on aimerait trouver en O le torseur d'action mécanique de ce contact:

- L'élément d'effort local est : $\overrightarrow{dF}(M) = -h \cdot \rho \cdot g \cdot \vec{z} \cdot dS$ car on intègre sur une surface de contact.
- La position du point M sur la surface de contact est: $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{y}$
- On définit les bornes de x et de y permettant de définir toute la surface de contact: $x \in [-l/2; l/2]; y \in [-L/2; L/2]$
- Le petit élément de surface défini en faisant varier x et y donne : $dS = dx \cdot dy$

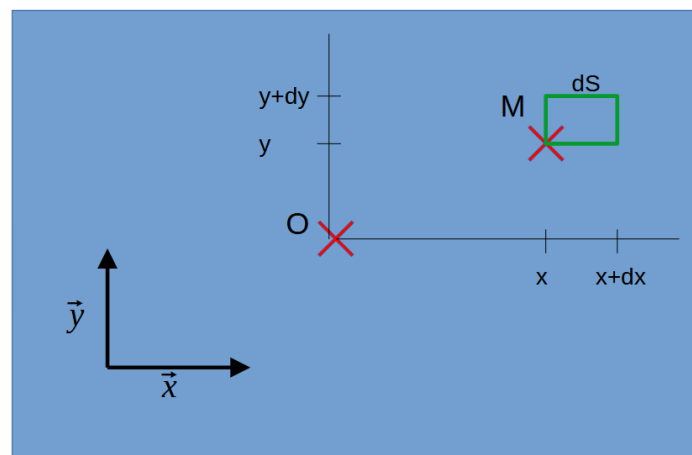


Figure 4: Calcul de dS.

- On peut alors poser les intégrales en respectant les bonnes bornes définies:

$$\vec{R} = \int_{Surface} \overrightarrow{dFm}(M) = \int_{Surface} -h \cdot \rho \cdot g \cdot \vec{z} \cdot dS = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-l/2}^{l/2} -h \cdot \rho \cdot g \cdot \vec{z} \cdot dx \cdot dy$$

Les intégrales sont bien ordonnées car on peut bien placer les parenthèses suivantes:

$$\vec{R} = \int_{-L/2}^{L/2} \left(\int_{-l/2}^{l/2} -h \cdot \rho \cdot g \cdot \vec{z} \cdot dx \right) \cdot dy$$

- On peut alors réaliser le calcul en réalisant les intégrales indépendamment
- Le résultat serait :

$$\vec{R} = -L.l.h.\rho.g.\vec{z}$$

Remarque: L'expression de dS dans le cadre de coordonnées cartésiennes est simple mais la méthode présentée permet de trouver pour les coordonnées cylindriques ou sphériques.

3.4 Torseurs d'action mécaniques transmissible par les liaisons

Les contacts entre solides permettent de transmettre des efforts dans les directions bloquant les mouvements, il est donc possible de déterminer les actions mécaniques que chacune des liaisons cinématiques est capable de transmettre.

Nom de la liaison	Torseur des actions transmissibles	Représentation schématique
Pivot	$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_R$	
Glissière	$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_R$	
Hélicoïdale	$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X^* & L^* \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_R \quad L = X \cdot \frac{pas}{2\pi}$	
Pivot glissant	$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_R$	
Sphérique	$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_R$	
Appui plan	$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & L \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_R$	
Linéaire Annulaire	$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_R$	
Linéaire rectiligne	$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_R$	
Ponctuelle	$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_R$	

3.5 Modèle de frottement et d'adhérence de Coulomb

3.5.1 Mise en évidence du phénomène

Si on regarde un objet placé sur un plan incliné on peut remarquer qu'il ne tombe pas si l'angle du plan est faible.

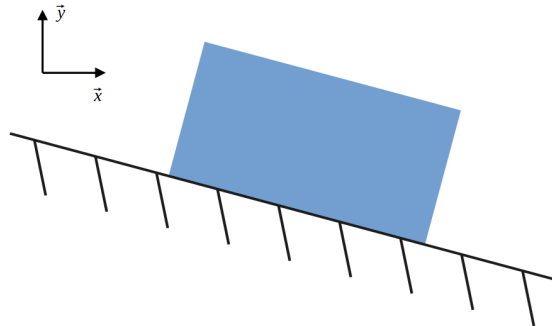


Figure 5: Solide posé sur un plan incliné.

Si on affiche les actions mécaniques que l'on pense s'appliquer sur le solide alors on peut afficher:

- Le poids du solide dirigé sur $-\vec{y}$
- La réaction du support dirigée normale à la surface de contact

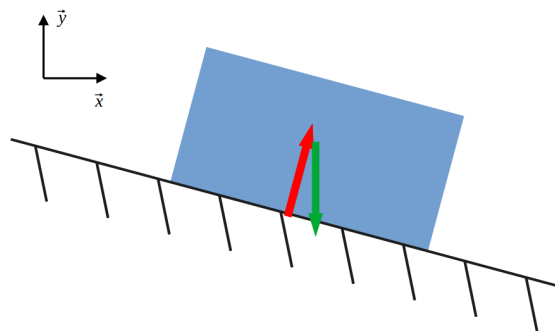


Figure 6: Tracé des actions mécaniques.

On remarque que les vecteurs étant non-colinéaires, il est impossible d'obtenir un équilibre statique : il manque une action mécanique dans notre bilan! Cet effort tangent à la surface est nommé l'effort d'adhérence dans le cas de l'absence de mouvement relatif entre les surfaces en contact et effort de frottement s'il y a un mouvement.

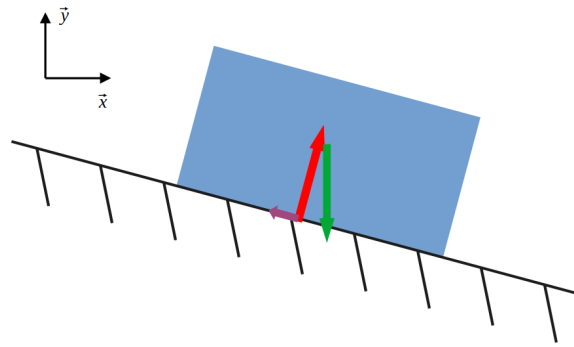


Figure 7: Effort d'adhérence.

L'effort d'adhérence n'est pas infini, si on pousse le solide de manière plus importante ou en augmentant l'angle de la pente, il est possible de déclencher le glissement. De plus en réitérant l'expérience, l'angle maximal atteint avant glissement reste le même si on augmente la masse de l'objet.

3.5.2 Mise en équations

En chaque point de contact entre solides on peut décomposer l'effort en une partie normale au contact et une partie tangentielle au contact :

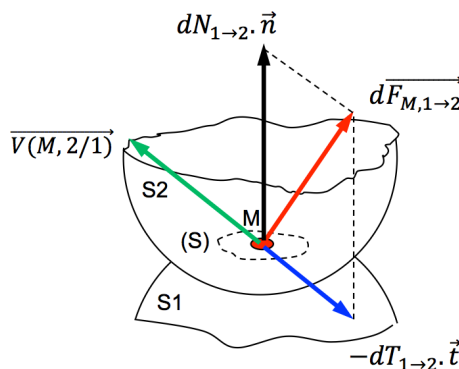


Figure 8: Modélisation locale du contact frottant.

• Effort local avec frottement ou adhérence

L'effort local d'un solide 1 sur un solide 2 avec contact frottant s'écrit au point M

$$\overrightarrow{dF_{M,1\rightarrow 2}} = dN_{M,1\rightarrow 2} \cdot \vec{n} - dT_{M,1\rightarrow 2} \cdot \vec{t}$$

Avec :

- $dN_{M,1\rightarrow 2}$ la composante normale
- $\vec{n}$ le vecteur normal au contact (dans le sens de 1 vers 2)
- $dT_{M,1\rightarrow 2}$ l'effort tangentiel de frottement ou d'adhérence
- $\vec{t}$ le vecteur tangent au contact et dans le sens de la vitesse de glissement ou à la direction préférentielle de glissement dans le cadre de l'adhérence.

L'effort tangentiel est limité mais sa limite est proportionnelle à la norme de l'effort normal:

• **Limite de l'effort tangent dans le cadre de l'adhérence**

En reprenant les définitions précédentes:

$$\frac{|dT_{M,1 \rightarrow 2}|}{|dN_{M,1 \rightarrow 2}|} \leq f_a$$

Avec f_a un coefficient appelé coefficient d'adhérence.

• **Limite de l'effort tangent dans le cadre du frottement**

En reprenant les définitions précédentes:

$$\frac{|dT_{M,1 \rightarrow 2}|}{|dN_{M,1 \rightarrow 2}|} = f$$

Avec f un coefficient appelé coefficient de frottement.

Remarques : Le coefficient f ne dépend que du type de contact (matériaux, état de surface ...). Le coefficient est plus grand dans le cadre de l'adhérence et sera régulièrement appelé f_a .

Remarques : L'effort $\overrightarrow{dF_{M,1 \rightarrow 2}}$ se place dans un cône d'angle φ et dans ce cas on a :

$$f = \tan(\varphi)$$

3.5.3 Méthode générale pour les problèmes avec du frottement

On peut repérer qu'on est dans un problème de statique avec du frottement quand on parle de contact non parfait, dans ce cas-là on doit ajouter un effort tangentiel.

Le problème de ce genre de problème est le symbole " $\leq$ " de l'équation de limite de l'effort tangent, une hypothèse levant l'ambiguïté est de se placer en limite de glissement (à l'effort maximum d'adhérence avant de glisser) donnant alors l'équation :

$$\frac{|dT_{M,1 \rightarrow 2}|}{|dN_{M,1 \rightarrow 2}|} = f$$

Si jamais on ne travaille pas avec des efforts locaux, le même type de modèle peut se faire avec un effort global : on ajoute un effort tangentiel respectant les mêmes équations.

4 Principe fondamental de la statique (PFS)

Pour modéliser l'équilibre des solides, on se basera sur la modélisation de Newton : en 1687 il publie un ouvrage nommé "Philosophiae naturalis principia mathematica" dans lequel on retrouve les lois du mouvement qui nous intéressent ici.

4.1 Les lois de Newton

L'énoncé des trois lois du mouvement de Newton est:

- "Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d'état. "
- "Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice ; et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée. "
- "L'action est toujours égale et opposée à la réaction ; c'est-à-dire, que les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales, et dans des directions contraires. "

Ces lois ne peuvent s'appliquer que dans un référentiel galiléen comme défini dans la section 2, elles s'appliquent sur tous les points d'un solide. La première loi permet d'énoncer le Principe Fondamental de la Statique (PFS) sur un solide:

- **Énoncé du Principe Fondamental de la Statique**

Dans un référentiel galiléen, un solide S à l'équilibre (immobile ou en mouvement de translation rectiligne à vitesse constante):

$$\sum_i \{\mathcal{T}_{i \rightarrow S}\} = \{0\}$$

On fera attention à ne pas oublier d'action mécanique dans les calculs.

4.2 Isolement d'un solide et écriture des équations d'équilibre

L'étude de l'équilibre des solides se fait en respectant les hypothèses définies dans la section 2. Nous étudierons des mécanismes et appliquerons le principe fondamental de la statique pour trouver des relations entre les efforts extérieurs et intérieurs. L'étude commence par la réalisation d'un graphe de structure pour déterminer une stratégie de calcul et dénombrer les actions mécaniques.

4.2.1 Graphe de structure

Un graphe de structure est un graphe de liaison sur lequel on a ajouté les actions mécaniques extérieures. Cette représentation permet de déterminer la stratégie de résolution pour le problème.

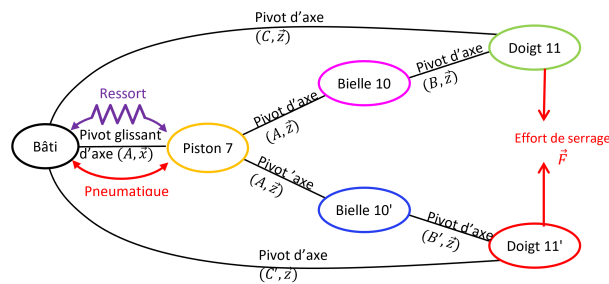


Figure 9: Exemple de graphe de structure.

4.2.2 Choix d'un solide

L'écriture des équations se fait sur un solide. Une fois le solide choisi, on réalise ce qu'on appelle un **isolement**, c'est à dire qu'on va ignorer le reste du mécanisme pour se focaliser sur ce solide.

4.2.3 Bilan des actions mécaniques extérieures

Pour écrire les équations d'équilibre il est nécessaire de ne pas oublier d'action mécanique. Pour cela on utilise le graphe de structure : on entoure le solide isolé et chaque trait franchissant le cercle représente une action mécanique extérieure s'appliquant sur le solide. On liste alors ces actions et le torseur d'action mécanique associé.

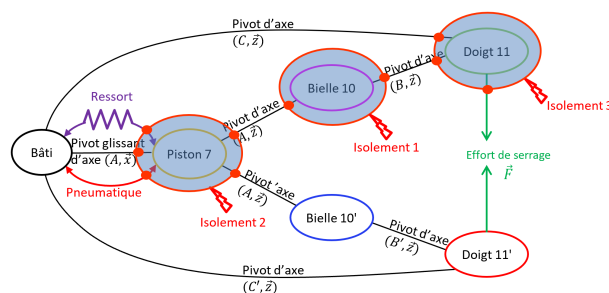


Figure 10: Exemple d'utilisation du graphe de structure pour lister les actions mécanique extérieur.

4.2.4 Écriture des équations

L'application du PFS se fait en additionnant tous les torseurs d'actions mécanique. On rappelle que la somme de torseurs ne peut se faire que si tous les torseurs sont écrits au même point et il faut alors utiliser la formule de Varignon pour déplacer chaque torseur.

• Rappel de méthode

Un torseur s'écrit:

$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = {}_A \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_{A,1 \rightarrow 2}} \end{array} \right\}$$

Pour écrire le même torseur au point B on écrit:

$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = {}_B \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_{B,1 \rightarrow 2}} \end{array} \right\}$$

On garde la même résultante (la ligne du haut) et on doit calculer le moment au deuxième point avec la formule de Varignon :

$$\overrightarrow{M_{B,1 \rightarrow 2}} = \overrightarrow{M_{A,1 \rightarrow 2}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}}$$

Une fois tous les torseurs écrits au même point on peut les additionner pour obtenir deux équations vectorielles d'équilibre, on devra les projeter pour les utiliser.

4.3 Principe des actions réciproques

La troisième loi de Newton dites des actions réciproques permet de relier les efforts d'un solide sur un autre:

• Théorème des actions réciproques

$$\forall i, j \quad \{\mathcal{T}_{i \rightarrow j}\} = -\{\mathcal{T}_{j \rightarrow i}\}$$

4.4 Cas particulier du bâti

Il est possible d'isoler tous les solides à l'exception du solide de référence: **Il est interdit d'isoler le bâti**. Le bâti est généralement relié à la terre et la somme des efforts venant du système ne s'équilibre pas.

4.5 Isolement d'un ensemble de solide

Il est possible de trouver plus rapidement des équations utiles en isolant plusieurs solide d'un coup, par exemple si on isole un solide 1 et un solide 2:

- L'équilibre du solide 1 s'écrit

$$\sum_{i \neq 2} \{\mathcal{T}_{i \rightarrow 1}\} + \{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\} = \{0\}$$

- L'équilibre du solide 2 s'écrit

$$\sum_{i \neq 1} \{\mathcal{T}_{i \rightarrow 2}\} + \{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \{0\}$$

La somme des deux systèmes d'équilibre s'écrit alors :

$$\sum_{i \neq 2} \{\mathcal{T}_{i \rightarrow 1}\} + \sum_{i \neq 1} \{\mathcal{T}_{i \rightarrow 2}\} + \{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\} + \{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \{0\}$$

Le théorème des actions réciproque permet de simplifier l'équation :

$$\sum_{i \neq 2} \{\mathcal{T}_{i \rightarrow 1}\} + \sum_{i \neq 1} \{\mathcal{T}_{i \rightarrow 2}\} = \{0\}$$

Ce qui revient à :

$$\sum_{i \neq \{1,2\}} \{\mathcal{T}_{i \rightarrow \{1+2\}}\} = \{0\}$$

Soit les équations d'équilibre si on prenait les solides 1 et 2 comme un seul solide.

On ne peut pas déterminer les efforts entre 1 et 2 mais cela permet d'économiser un isolement.

4.6 Cas du solide soumis à deux glisseurs

Soit un solide (S) soumis à deux efforts de type glisseurs au repos dans un référentiel galiléen, on isole ce solide et on effectue le BAME (Bilan des Actions Mécaniques Extérieures)

- Glisseur 1 (en A):

$$\{\mathcal{T}_{G1 \rightarrow S}\} = {}_A \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

- Glisseur 2 (en B):

$$\{\mathcal{T}_{G2 \rightarrow S}\} = {}_B \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

On décide de déplacer tous les torseurs en un seul point (le B)

- Glisseur 1 (en A):

$$\{\mathcal{T}_{G1 \rightarrow S}\} = {}_A \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\} = {}_B \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \vec{BA} \wedge \vec{R}_1 \end{array} \right\}$$

- Glisseur 2 (en B):

$$\{\mathcal{T}_{G2 \rightarrow S}\} = {}_B \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

Les équations d'équilibre s'écrivent alors:

$$\{\mathcal{T}_{G1 \rightarrow S}\} + \{\mathcal{T}_{G2 \rightarrow S}\} = \{0\}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = \vec{0} \\ \vec{BA} \wedge \vec{R}_1 = \vec{0} \end{cases}$$

La deuxième équation implique que $\vec{BA}$ et $\vec{R}_1$ (et donc $\vec{R}_2$) sont colinéaires.

• Solide soumis à deux glisseurs

Si un solide (ou ensemble de solides) est soumis à deux glisseurs alors ces glisseurs sont portés par la droite passant par les deux points d'application des efforts.

4.7 Stratégie de résolution

Il n'est pas toujours nécessaire de faire autant d'isollements que de solides isolables, il est possible avec une bonne stratégie de gagner en efficacité, voici quelques conseils pour ne pas faire des heures de calculs inutiles:

- Un problème d'équilibre statique n'est pas toujours de déterminer toutes les actions mécaniques entre tous les solides, on doit se concentrer sur les équations voulues.

- Les solides (ou ensemble de solides) soumis à deux glisseurs sont très rapides à isoler pour trouver rapidement les directions des efforts et on peut se concentrer dessus en priorité.
- les vérins s'isolent toujours par deux (le corps et la tige).
- Un isolement donne au maximum 6 équations, on peut regarder si un isolement de tous les solides hors bâti permet de trouver les bonnes équations. Sinon il faudra réfléchir à un autre isolement pour trouver d'autre équation.
- Pour choisir le point de réduction des torseurs on suit la liste des priorités suivantes:
 - On choisit en priorité le point qui simplifie au plus les équations de moment (si on veut une équation entre deux efforts alors on va chercher à déplacer ces deux efforts et éviter de faire apparaître les autres actions mécaniques).
 - Si rien ne nous saute aux yeux, on choisit le point qui minimise le nombre de torseurs à déplacer.
 - Enfin si jamais on hésite encore entre deux points, on peut choisir le point dont l'expression des vecteurs est la plus simple.
- On veut parfois uniquement des relations d'équilibre entre les résultante et il n'est alors pas utile de calculer les équations de moment.

4.8 Modélisation plane d'un problème d'équilibre

Une simplification usuelle des problèmes est la modélisation plane des problèmes, elle peut se faire lorsque les deux hypothèses suivantes sont remplies:

- La géométrie des liaisons du système présente un plan de symétrie.
- Ce même plan est plan de symétrie des actions mécaniques extérieures.

Dans ce cas la il est possible de simplifier le problème en le considérant comme plan.

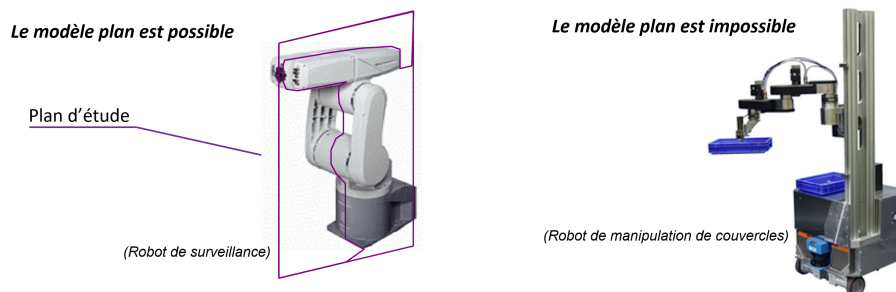


Figure 11: Plan de symétrie d'un système.

Dans ce cadre, on ne considérera que les résultantes qui sont dans ce plan et les moment qui sont perpendiculaires au plan:

Une simplification par le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$ est :

$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_O \Rightarrow \begin{Bmatrix} X & / \\ Y & / \\ / & N \end{Bmatrix}_R$$

On ne travaille alors qu'avec 3 grandeurs et donc 3 équations, cela permet de simplifier les calculs.

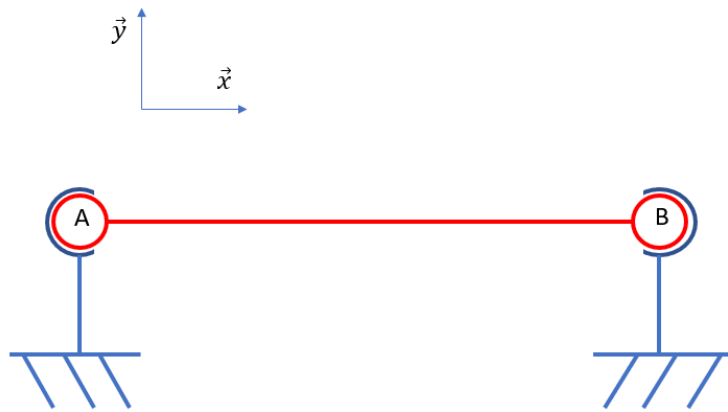


Figure 12: Exemple de problème hyperstatique.

4.9 Petite introduction à l'hyperstatisme

Il n'est parfois pas possible de résoudre entièrement un problème de statique, par exemple:

Si on applique un effort sur la barre rouge alors on ne peut pas trouver tous les efforts transmis par les liaisons : c'est ce qu'on appelle un problème hyperstatique. Il est possible de prédire si le problème étudié est hyperstatique ou pas en évaluant la quantité h définie par:

$$h = E_s - I_s + m$$

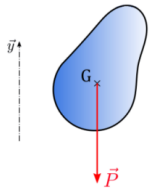
avec:

- E_s le nombre d'équations issues de la statique qu'il est possible d'avoir (6 par solide hors le bâti).
- I_s le nombre d'inconnu d'action mécanique de liaison dans le système.
- m le nombre de mobilité (le nombre de manière différente qu'il est possible de faire bouger le système)

Si h est nul alors il est possible de déterminer toutes les inconnues de liaisons mais si h est positif alors il manquerait h équation(s) pour déterminer l'intégralité des inconnues.

5 Actions mécaniques usuelles

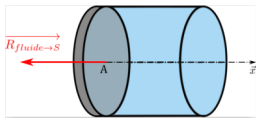
Action de la pesanteur



$$\{\mathcal{T}_{Pesanteur \rightarrow S}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -m \cdot g & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$$

- m : masse du solide en [kg]
- g : accélération gravitationnel $g = 9.81 m.s^{-2}$

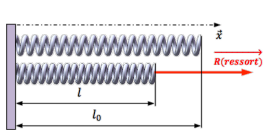
Action d'un fluide sur une surface



$$\{\mathcal{T}_{Fluide \rightarrow S}\}_A = \begin{Bmatrix} -P \cdot S & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$$

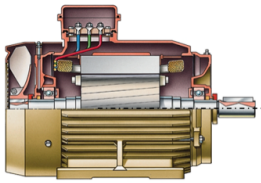
- P : Pression du fluide [Pa]
- S : Surface [m^2]

Action d'un ressort



$$\{\mathcal{T}_{R \rightarrow S}\}_G = \begin{Bmatrix} -k(L - L_0) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$$

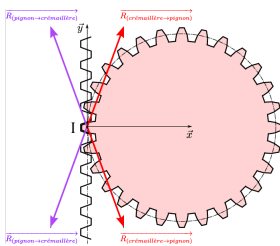
- k : raideur du ressort [N/m]
- L : Longueur du ressort [m]
- L_0 : Longueur à vide du ressort [m]



$$\{\mathcal{T}_{Moteur \rightarrow S}\}_M = \begin{Bmatrix} 0 & C_m \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$$

Action d'un couple moteur

- C_m : Couple moteur [N.m]



$$\{\mathcal{T}_{Ext \rightarrow Roue}\}_I = \begin{Bmatrix} -F \cdot \sin(\alpha) & 0 \\ F \cdot \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$$

Action d'un contact avec une roue dentée (Engrenages ou crémaillère)

- F : Effort de contact [N]
- α : angle de pression [rad]