



Objectif : L'objectif de ce cours est de déterminer les propriétés cinématiques (position, vitesse, accélération et trajectoire) de systèmes composés de solides indéformables. Le but est de valider un cahier des charges et de dimensionner des actionneurs pour valider les exigences cinématiques.

1 Généralités et rappels

Quelques rappels utiles de définitions pour ce cours.

1.1 Solide indéformable

Un solide est un ensemble de points matériels composants un système matériel. Il est dit indéformable si:

$$\forall A, B \in S, \forall t \quad ||\overrightarrow{AB}|| (t) = \text{constante}$$

1.2 Repère et référentiel

On définit un repère comme une base de vecteurs (3 vecteurs formant une base orthonormée directe permettant de définir d'autres vecteurs) à laquelle on associe un point d'origine. Chaque solide se voit associé un repère. Un référentiel est un repère auquel on a associé une mesure du temps.

1.3 Paramétrage

Pour repérer un solide par rapport à un autre dans le temps, on doit paramétrer la position du repère du premier solide dans le repère du second et son orientation: on définit donc les positions (x, y et z) du point d'origine du repère à paramétrer puis on définit les rotation grâce à des figure de changement de bases.

1.4 Torseurs

Un torseur est un outils mathématique permettant de représenter un champs vectoriel, il s'écrit en un point donné et se compose de deux vecteurs: la résultante (invariante du point de l'espace choisit pour écrire le torseur) et d'un moment (variable en fonction du point choisit):

$$_M \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{Resultante} \\ \overrightarrow{Moment\ en\ M} \end{array} \right\}$$

2 Mouvement simple et équations horaires

Les mouvements peuvent se décomposer en translation et en rotation, dans de nombreux cas on se limitera à un seul des deux mouvements mais avec une accélération constante.

2.1 Mouvement de rotation simple

Un mouvement de rotation simple est un mouvement qui connaît au moins un point sans vitesse linéaire:

$$\{v_{1/0}\} = \underset{M}{\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}}$$

On étudiera des cas de rotation simples avec une vitesse de rotation avec un seul axe de rotation.

2.2 Mouvement de translation simple

Un mouvement de translation simple est un mouvement de translation sans rotation et dans une direction constante:

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{V} \end{array} \right\}_M$$

On étudieras le cas de translation à vitesse ou accélération constante pour des cas simples.

2.3 Équations horaires

Dans le cadre des mouvement simple, il est possible de décrire la position, la vitesse et l'accélération (linéaire ou angulaire) de manière simple. Les équations horaires sont l'intégration de l'accélération constante donnant la vitesse et la position de notre solide en tout temps. Une étude des lois de vitesse sous forme de "trapèze de vitesse" (la vitesse croît linéairement puis est constante avant de diminuer linéairement) est possible en utilisant les équations dans chacune des phases différentes de fonctionnement.

On écrit les équations pour les rotations et les translations mais elles sont identiques et seules les notations changent:

• Équations horaires des Mouvement Uniformément Varié (MUV)

Mouvement de translation	Mouvement de rotation
$\begin{cases} \ddot{x}(t) = a = cte \\ \dot{x}(t) = v(t) = a \cdot (t - t_0) + v_0 \\ x(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_0)^2 + v_0 \cdot (t - t_0) + x_0 \end{cases}$	$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = a_\theta = cte \\ \dot{\theta}(t) = \omega(t) = a_\theta \cdot (t - t_0) + \omega_0 \\ \theta(t) = \frac{1}{2} \cdot a_\theta \cdot (t - t_0)^2 + \omega_0 \cdot (t - t_0) + \theta_0 \end{cases}$

Dans le cas où l'accélération est nulle les équations deviennent

• Équations horaires des Mouvement Uniformément Varié (MUV)

Mouvement de translation	Mouvement de rotation
$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \dot{x}(t) = v(t) = v_0 \\ x(t) = v_0 \cdot (t - t_0) + x_0 \end{cases}$	$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = 0 \\ \dot{\theta}(t) = \omega(t) = \omega_0 \\ \theta(t) = \omega_0 \cdot (t - t_0) + \theta_0 \end{cases}$

Les quantités avec l'indice 0 sont les quantités initiales de la phase d'étude.

Les études des lois de vitesses peuvent aussi se faire de manière graphiques:

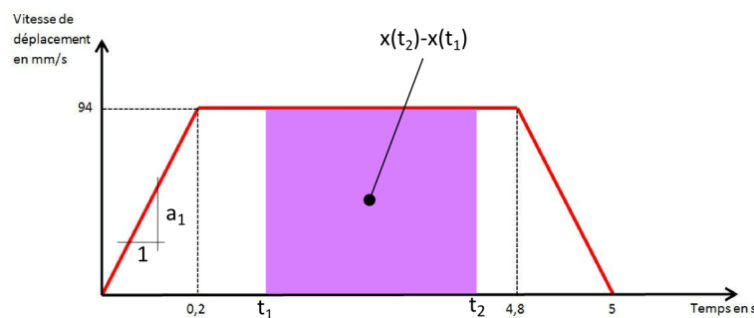


Figure 1: Loi de vitesse en trapèze

Lors de l'étude d'une loi de vitesse, il est possible de trouver l'accélération en regardant la pente de la vitesse, la position tant l'intégrale de la vitesse: il est possible de trouver la position en reprenant la définition géométrique de l'intégrale en trouvant l'aire sous la courbe de vitesse.

3 Cinématique du point

La plupart des mouvements sont plus complexe qu'une simple translation ou une simple rotation, il est nécessaire de regarder la cinématique d'un point matériel. On notera aussi que toutes les grandeurs cinématiques dépendent de la référence prise c'est pour cela que toutes les grandeurs sont annotées d'un indice $/R_i$ indiquant la référence prise. Pour simplifier les notations, on notera parfois $/i$ en prenant le repère associé au solide i .

3.1 Trajectoire

La trajectoire d'un point appartenant à un mouvement est l'intégralité des positions que peut prendre ce point lors du temps, on définit la position d'un point M dans un repère R_i comme:

$$\overrightarrow{O_i M} = x_M(t) \cdot \vec{x}_0 + y_M(t) \cdot \vec{y}_0 + z_M(t) \cdot \vec{z}_0$$

avec O_i le point d'origine du repère R_i .

3.2 Vitesse d'un point

La vitesse est définie en 1D par :

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Avec x la position linéaire.

On reprends cette définition pour notre définition de la position.

• Définition de la vitesse

La vitesse du point M attaché au solide S dans son mouvement par rapport au repère R est défini par:

$$\overrightarrow{V_{M \in S/R}(t)} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_R M}(t)}{dt} \right]_R$$

Avec O_R l'origine du repère R .

Il est important de noter le repère de dérivation car cela impose notre origine et le solide fixe dans l'étude du mouvement, le solide d'attache du point ne veut pas dire que le point fait parti du solide mais qu'on étudie les mouvement du point dans le mouvement du solide choisi par rapport au repère choisi.

3.3 Accélération d'un point

L'accélération est définie comme la dérivée de la vitesse, on a donc:

• Définition de l'accélération

L'accélération du point M attaché au solide S dans son mouvement par rapport au repère R est défini par:

$$\overrightarrow{\Gamma_{M \in S/R}(t)} = \left[\frac{d\overrightarrow{V_{M \in S/R}(t)}}{dt} \right]_R = \left[\frac{d^2\overrightarrow{O_R M}(t)}{dt^2} \right]_R$$

Avec O_R l'origine du repère R .

4 Dérivation vectorielle

Pour déterminer les vitesses, il est nécessaire de dériver des vecteurs. Le cas le plus simple est la dérivation d'un vecteur dans la base d'expression, par exemple:

On prends $\vec{u} = x_U(t) \cdot \vec{x}_0 + y_U(t) \cdot \vec{y}_0 + z_U(t) \cdot \vec{z}_0$, on peut alors exprimer la dérivée de $\vec{u}$ dans le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$:

$$\left[\frac{d\vec{u}(t)}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{x_U(t) \cdot \vec{x}_0 + y_U(t) \cdot \vec{y}_0 + z_U(t) \cdot \vec{z}_0}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{x_U(t) \cdot \vec{x}_0}{dt} \right]_{R_0} + \left[\frac{y_U(t) \cdot \vec{y}_0}{dt} \right]_{R_0} + \left[\frac{z_U(t) \cdot \vec{z}_0}{dt} \right]_{R_0}$$

Dans le repère R_0 les vecteurs $\vec{x}_0$, $\vec{y}_0$ et $\vec{z}_0$ sont fixes et invariants, on peut donc les sortir des dérivées (on enlève alors les crochets car les grandeurs numériques ne dépendent pas du repère d'observation):

$$\left[\frac{d\vec{u}(t)}{dt} \right]_{R_0} = \frac{x_U(t)}{dt} \cdot \vec{x}_0 + \frac{y_U(t)}{dt} \cdot \vec{y}_0 + \frac{z_U(t)}{dt} \cdot \vec{z}_0$$

Ceci est le cas le plus simple, dans le cas où le repère d'expression du vecteur est différent de celui de référence pour la dérivation il est nécessaire de faire autrement.

4.1 Produit vectoriel

Le produit vectoriel est un outil mathématique très utilisé en mécanique et en physique. Il s'agit d'une application prenant en entrée deux vecteurs ($\vec{u}$ et $\vec{v}$) et donnant en sortie le vecteur ($\vec{w}$).

Le produit vectoriel s'écrit:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$$

Ce produit est bilinéaire et antisymétrique:

$$\begin{aligned} (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \wedge \vec{v} &= \vec{u}_1 \wedge \vec{v} + \vec{u}_2 \wedge \vec{v} \\ (a \cdot \vec{u}) \wedge \vec{v} &= a \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) \end{aligned}$$

et:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

Le vecteur obtenu est perpendiculaire au plan formé par les deux vecteurs d'entrées, sa norme est égale à l'aire du quadrilatère créé avec les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le sens se donne grâce à la loi du tire-bouchon (vers nous si le produit vectoriel fait tourner le premier vecteur dans le sens trigonométrique pour relier le second vecteur le plus rapidement possible).

On obtient donc:

$$||\vec{u} \wedge \vec{v}|| = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})$$

D'où :

$$\forall \vec{u}, \vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$$

4.1.1 Utilisation pratique

La définition précédente ne permet que peu d'application. Dans notre cas on utilisera les propriétés d'une base orthonormée directe, que nous utiliserons à chaque fois.

Les produits scalaires des vecteurs de bases donnent:

$$\begin{aligned} \vec{x} \wedge \vec{y} &= \vec{z} & \vec{y} \wedge \vec{x} &= -\vec{z} \\ \vec{y} \wedge \vec{z} &= \vec{x} & \vec{z} \wedge \vec{y} &= -\vec{x} \\ \vec{z} \wedge \vec{x} &= \vec{y} & \vec{x} \wedge \vec{z} &= -\vec{y} \end{aligned}$$

On se place maintenant dans le cas du produit vectoriel entre deux vecteurs exprimés dans un même repère R. Prenons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

On veut calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

Par bilinéarité:

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= \left[\begin{pmatrix} U_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ U_y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U_z \end{pmatrix} \right] \wedge \left[\begin{pmatrix} V_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ V_y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_z \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} U_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ V_y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_z \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 \\ U_y \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ U_y \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ V_y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ U_y \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_z \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ V_y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Avec les résultats des produits vectoriels des vecteurs de bases:

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U_x \cdot V_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -U_x \cdot V_z \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -U_y \cdot V_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_y \cdot V_z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 \\ U_z \cdot V_x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -U_z \cdot V_y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} U_y \cdot V_z - U_z \cdot V_y \\ U_z \cdot V_x - U_x \cdot V_z \\ U_x \cdot V_y - U_y \cdot V_x \end{pmatrix}$$

4.1.2 Méthode de calcul

Le calcul théorique peut se retenir grâce à un moyen mnémotechnique:

Pour calculer le résultat sur une ligne

- On masque les composantes sur cette ligne.
- Si les deux lignes qui restent sont collées, le résultat sera le produit de la diagonale partant d'en haut à gauche moins le produit de l'autre diagonale.
- Si les deux lignes qui restent sont séparées, le résultat sera le produit de la diagonale partant d'en bas à gauche moins le produit de l'autre diagonale.

4.2 Vitesse de rotation d'un solide

Le dernier élément nécessaire pour introduire la formule de Bour est le vecteur vitesse de rotation.

Le vecteur vitesse de rotation peut se déterminer grâce à la figure de changement de base:

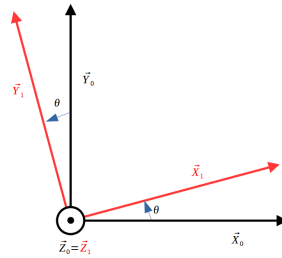


Figure 2: Exemple de figure de changement de base

La vecteur vitesse de rotation entre les repère R_0 et R_1 se note $\overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}}$ (lire vitesse de rotation du repère 1 dans le mouvement par rapport au repère 0) se note aussi $\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$.

- $\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$ est porté par le vecteur perpendiculaire dans la figure (ici le vecteur $\vec{z}_0$). Le sens est conservé.
- La norme du vecteur $\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$ est la dérivé de l'angle de la figure de changement de base.

Ainsi il est possible de déduire:

$$\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\theta} \cdot \vec{z}_0$$

4.3 Formule de Bour

Pour éviter d'avoir à projeter tout vecteur dans la base de dérivation il existe la formule de changement de repère de dérivation:

• Formule de Bour

$$\forall \vec{u}, \quad \left[\frac{d\vec{u}(t)}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{u}(t)}{dt} \right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}(t) \wedge \vec{u}(t)$$

Cette formule se démontre en prenant chaque composante de $\vec{u}$ dans les repères R_0 et R_1 et en dérivant dans les deux repères.

4.4 Propriété du vecteur vitesse de rotation

Antisymétrie: La définition du vecteur vitesse de rotation permet d'écrire la relation d'antisymétrie:

• Antisymétrie du vecteur vitesse de rotation

$$\forall i, j \quad \overrightarrow{\Omega_{i/j}} = -\overrightarrow{\Omega_{j/i}}$$

Composition : La formule de Bour pour un vecteur $\vec{u}$ quelconque donne:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\vec{u}(t)}{dt} \right]_{R_0} &= \left[\frac{d\vec{u}(t)}{dt} \right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}(t) \wedge \vec{u}(t) \\ \left[\frac{d\vec{u}(t)}{dt} \right]_{R_1} &= \left[\frac{d\vec{u}(t)}{dt} \right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}}(t) \wedge \vec{u}(t) \end{aligned}$$

$$\left[\frac{d\vec{u}(t)}{dt} \right]_{R_2} = \left[\frac{d\vec{u}(t)}{dt} \right]_{R_0} + \overrightarrow{\Omega_{0/2}(t)} \wedge \vec{u}(t)$$

L'addition des trois formules donne:

$$\left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right]_{R_0} + \left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right]_{R_1} + \left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right]_{R_2} = \left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \vec{u} + \left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \vec{u} + \left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right]_{R_0} + \overrightarrow{\Omega_{0/2}} \wedge \vec{u}$$

En factorisant les produits vectoriels et en simplifiant les dérivés:

$$(\overrightarrow{\Omega_{1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{0/2}}) \wedge \vec{u} = \vec{0}$$

Vrai quelque soit le vecteur $\vec{u}$, on en déduit donc que:

$$\overrightarrow{\Omega_{1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{0/2}} = \vec{0}$$

En utilisant l'antisymétrie on obtient la formule de composition de vitesse de rotation (ressemblant beaucoup à la relation de Chasles)

$$\overrightarrow{\Omega_{1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \overrightarrow{\Omega_{2/0}}$$

On en déduit la loi générale:

• **Loi de composition des vitesses de rotations**

$$\forall (i, j, k) \quad \overrightarrow{\Omega_{i/j}} + \overrightarrow{\Omega_{j/k}} = \overrightarrow{\Omega_{i/k}}$$

5 Champs de vitesse

Il est impossible d'utiliser la dérivation vectorielle pour trouver la vitesse de tout les points composant un solide. Pour cela on va démontrer une formule permettant d'utiliser un champs vectoriel pour déterminer ces différentes vitesses.

5.1 Formule de Varignon

Prenons deux points A et B appartenant au même solide, un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de référence et un repère $R_S(O_S, \vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)$ lié au solide:

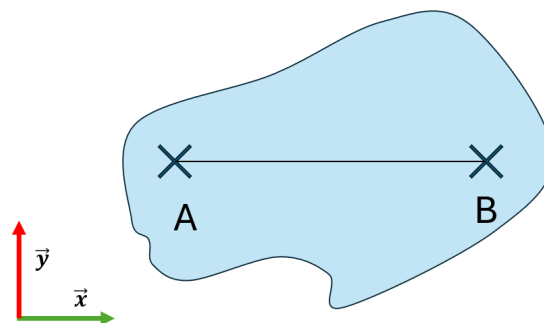


Figure 3: Deux points appartenant à un même solide

Les points A et B étant liés au solide S indéformable on a : $\left[\frac{d\vec{AB}}{dt} \right]_{R_S} = \vec{0}$

Les vitesses des points A et B se déterminent par:

$$\begin{cases} \overrightarrow{V_{A \in S/R}} = \left[\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} \right]_R \\ \overrightarrow{V_{B \in S/R}} = \left[\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt} \right]_R \end{cases}$$

En décomposant le vecteur $\overrightarrow{OB}$ on obtient:

$$\begin{cases} \overrightarrow{V_{A \in S/R}} = \left[\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} \right]_R \\ \overrightarrow{V_{B \in S/R}} = \left[\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} \right]_R + \left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right]_R \end{cases}$$

On voit apparaître le vecteur $\overrightarrow{V_{A \in S/R}}$ et on obtient la formule suivante:

$$\overrightarrow{V_{B \in S/R}} = \overrightarrow{V_{A \in S/R}} + \left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right]_R$$

On utilise la formule de Bour:

$$\overrightarrow{V_{B \in S/R}} = \overrightarrow{V_{A \in S/R}} + \left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right]_{R_S} + \overrightarrow{\Omega_{R_S/R}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

On simplifie la dérivée de $\overrightarrow{AB}$ et on inverse le produit vectoriel (le signe - est utilisé pour inverser les repères du vecteur vitesse de rotation) pour plus de lisibilité et on obtient:

• **Formule de Varignon**

$$\overrightarrow{V_{B \in S/R}} = \overrightarrow{V_{A \in S/R}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{R_S/R}}$$

Remarque : Un moyen mnémotechnique pour cette formule est le personnage de fiction Babar le roi des éléphants:

$$\overrightarrow{\text{Vitesse en B}} = \overrightarrow{\text{Vitesse en A}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\text{Vitesse de Rotation}}$$

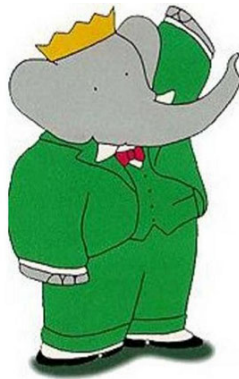


Figure 4: Babar, Le roi des éléphants

Remarque 2: La formule de Varignon est une formule générale pour les champs vectoriels et s'écrit habituellement:

$$\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R}$$

avec $\overrightarrow{M_A}$ et $\overrightarrow{M_B}$ les moments en A et B et $\overrightarrow{R}$ la résultante du champ vectoriel.

5.2 Torseur cinématique

La représentation mathématique d'un champs vectoriel est le torseur.

Pour représenter le champs de vitesse du mouvement d'un solide S par rapport à un repère R on écrit le torseur cinématique suivant:

• Torseur cinématique

$$\{\mathcal{V}_{S/R}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{M \in S/R}} \end{array} \right\}_M$$

La résultante de ce torseur est la vitesse de rotation, cette vitesse est invariante en changeant le point d'observation, le moment est la vitesse linéaire qui varie en fonction du point d'observation.

Un torseur peut s'écrire en plusieurs point et il est nécessaire de pouvoir changer de point d'écriture du torseur:

• Changement d'écriture du point d'un torseur

$$\{\mathcal{V}_{S/R}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{A \in S/R}} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{B \in S/R}} = \overrightarrow{V_{A \in S/R}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \end{array} \right\}_B$$

Remarque : On ne change que la ligne du bas grâce à la formule de Varignon.

5.3 Opération sur les torseurs cinématiques et les vecteurs vitesses

Composition des vitesses linéaires : Il est possible de démontrer une formule équivalente à celle de composition des vitesses de rotation,

- Soit un solide 1 auquel on lie le repère $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$,
- Soit un solide 2 auquel on lie le repère $R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$
- Soit un repère de référence $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
- Soit C un point fixe du solide 2.

Par définition on a:

$$\overrightarrow{V_{C \in 2/R}} = \left[\frac{d\overrightarrow{OC}}{dt} \right]_R$$

En décomposant le vecteur on obtient:

$$\overrightarrow{V_{C \in 2/R}} = \left[\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} \right]_R + \left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right]_R + \left[\frac{d\overrightarrow{BC}}{dt} \right]_R$$

On reconnait l'expression de $\overrightarrow{V_{A \in 1/R}}$ et on utilise la formule de Bour pour exprimer les vecteurs dans un repère pertinent:

$$\overrightarrow{V_{C \in 2/R}} = \overrightarrow{V_{A \in 1/R}} + \left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/R}} \wedge \overrightarrow{AB} + \left[\frac{d\overrightarrow{BC}}{dt} \right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{2/R}} \wedge \overrightarrow{BC}$$

On reconnait les définitions de vitesses linéaires:

$$\overrightarrow{V_{C \in 2/R}} = \overrightarrow{V_{A \in 1/R}} + \overrightarrow{V_{B \in 2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/R}} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{V_{C \in 2/2}} + \overrightarrow{\Omega_{2/R}} \wedge \overrightarrow{BC}$$

Une des vitesses est nulle et on inverse les produits vectoriels:

$$\overrightarrow{V_{C \in 2/R}} = \overrightarrow{V_{A \in 1/R}} + \overrightarrow{V_{B \in 2/1}} - \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/R}} - \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/R}}$$

On incorpore le signe - dans les vecteurs positions:

$$\overrightarrow{V_{C \in 2/R}} = \overrightarrow{V_{A \in 1/R}} + \overrightarrow{V_{B \in 2/1}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/R}} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/R}}$$

On reconnaît une formule de Varignon:

$$\overrightarrow{V_{C \in 2/R}} = \left\{ \overrightarrow{V_{A \in 1/R}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/R}} \right\} + \overrightarrow{V_{B \in 2/1}} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/R}}$$

D'où :

$$\overrightarrow{V_{C \in 2/R}} = \overrightarrow{V_{B \in 1/R}} + \overrightarrow{V_{B \in 2/1}} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/R}}$$

On peut maintenant décomposer le vecteur vitesse de rotation pour faire apparaître deux formules de Varignon:

$$\overrightarrow{V_{C \in 2/R}} = \overrightarrow{V_{B \in 1/R}} + \overrightarrow{V_{B \in 2/1}} + \overrightarrow{CB} \wedge (\overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/R}})$$

Et enfin :

$$\overrightarrow{V_{C \in 2/R}} = \left\{ \overrightarrow{V_{B \in 1/R}} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/R}} \right\} + \left\{ \overrightarrow{V_{B \in 2/1}} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \right\}$$

On obtient la loi de composition des vitesses:

$$\overrightarrow{V_{C \in 2/R}} = \overrightarrow{V_{C \in 2/1}} + \overrightarrow{V_{C \in 1/R}}$$

• Loi de composition des vitesses linéaires

$$\forall i, j, k, M \quad \overrightarrow{V_{M \in i/k}} = \overrightarrow{V_{M \in i/j}} + \overrightarrow{V_{M \in j/k}}$$

Antisymétrie: De cette loi on peut directement déterminer l'antisymétrie du vecteur vitesse linéaire:

$$\overrightarrow{V_{M \in i/j}} + \overrightarrow{V_{M \in j/i}} = \overrightarrow{V_{M \in i/i}} = \vec{0}$$

• Antisymétrie du vecteur de vitesse linéaire

$$\forall i, j, M \quad \overrightarrow{V_{M \in i/j}} = -\overrightarrow{V_{M \in j/i}}$$

Somme de deux torseurs: La somme de deux torseurs est possible en additionnant les résultantes entre elles et les moments **au même point** entre eux:

• Somme de torseurs

$${}_M \left\{ \begin{array}{c} \vec{A} \\ \vec{B} \end{array} \right\} + {}_M \left\{ \begin{array}{c} \vec{C} \\ \vec{D} \end{array} \right\} = {}_M \left\{ \begin{array}{c} \vec{A} + \vec{C} \\ \vec{B} + \vec{D} \end{array} \right\}$$

Composition globale des vitesses : En utilisant les deux formules de composition on peut établir la même relation avec les torseurs cinématique: On choisit un point M quelconque

$$\{ \mathcal{V}_{i/j} \} = {}_M \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{i/j}} \\ \overrightarrow{V_{M \in i/j}} \end{array} \right\} = {}_M \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{i/k}} + \overrightarrow{\Omega_{k/j}} \\ \overrightarrow{V_{M \in i/k}} + \overrightarrow{V_{M \in k/j}} \end{array} \right\} = {}_M \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{i/k}} \\ \overrightarrow{V_{M \in i/k}} \end{array} \right\} + {}_M \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{k/j}} \\ \overrightarrow{V_{M \in k/j}} \end{array} \right\}$$

• Composition des torseurs cinématiques

$$\forall i, j, k \quad \{ \mathcal{V}_{i/j} \} = \{ \mathcal{V}_{i/k} \} + \{ \mathcal{V}_{k/j} \}$$

6 Quelques cas particuliers

Pour ne pas avoir à faire les calculs en permanence, il est possible de connaître deux résultats simples.

6.1 Mouvement de translation

Un mouvement de translation est défini par un mouvement sans rotation, son torseur s'exprime en tout point de la forme

$$\forall M, \quad \{\mathcal{V}_{i/j}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{V} \end{Bmatrix}_M$$

6.2 Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Dans le cadre d'un mouvement de rotation autour d'un axe $(A, \vec{w})$ alors tout point M sur l'axe de rotation voit son torseur s'écrire comme:

$$\forall M \in (A, \vec{w}) \quad \{\mathcal{V}_{i/j}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{i/j} \cdot \vec{w} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_M$$

En prenant un vecteur $\vec{u}$ perpendiculaire à $\vec{w}$ et un vecteur $\vec{v}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit un repère orthonormé direct, tout point B défini par $\vec{AB} = r \cdot \vec{u}$ s'écrit de la manière :

$$\vec{AB} = r \cdot \vec{u} \quad \{\mathcal{V}_{i/j}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{i/j} \cdot \vec{w} \\ r \cdot \omega_{i/j} \cdot \vec{v} \end{Bmatrix}_B$$

On peut le démontrer par la formule de Varignon:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{B \in i/j}} &= \overrightarrow{V_{A \in i/j}} + \vec{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{i/j}} \\ \overrightarrow{V_{B \in i/j}} &= \vec{0} - r \cdot \vec{u} \wedge \omega_{i/j} \cdot \vec{w} \\ \overrightarrow{V_{B \in i/j}} &= r \cdot \omega_{i/j} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

6.3 Cas du roulement sans glissement

Un mouvement particulier récurrent est le roulement sans glissement, on le retrouve pour les solides roulant sur un plan (roue de voiture ou de vélo) ou dans le cadre des engrenages (cf section 8).

On parle de roulement sans glissement entre les solide i et j en I quand on a:

$$\overrightarrow{V_{I \in i/j}} = \vec{0}$$

7 Loi entrée-sortie cinématique

L'objectif de certaines études est de trouver des liens entre les vitesses d'un mécanisme, pour cela il existe plusieurs façons d'obtenir des relations utiles.

7.1 Lien avec les lois géométriques

Une loi entrée-sortie géométrique (Cf cours CI2) est utilisable pour déterminer une relation cinématique, en dérivant par rapport au temps la loi entrée-sortie géométrique on obtient une relation entre les vitesses d'entrée et de sortie du système.

7.2 Fermeture cinématiques

Si le système boucle (i.e. qu'on a pu réaliser une loi entrée-sortie géométrique) il est possible d'écrire une boucle de torseur cinématique grâce à la composition des torseurs cinématique, par exemple:

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} + \{\mathcal{V}_{2/1}\} + \{\mathcal{V}_{3/2}\} + \{\mathcal{V}_{0/3}\} = \{\mathcal{V}_{0/0}\} = \underset{M}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

On peut en déduire 2 équations vectorielles par égalité entre les torseurs. Par projection on trouve 6 équations scalaires et leur étude reprends les méthodes vu dans le cour sur les fermetures géométriques.

8 Réducteur de vitesse et autres éléments à roues dentées

Les réducteurs sont des systèmes visant à transformer un mouvement de rotation en diminuant sa vitesse (il est aussi possible de l'augmenter), l'intérêt est double: avoir une vitesse de rotation utilisable et l'augmentation du couple disponible (la capacité de se mettre en rotation) en sortie de la motorisation. La majorité des réducteurs utilise des roues dentées mais leur utilisation ne se limite pas aux réducteurs.

8.1 Roue dentée

Une roue dentée est une roue ayant une série de dent (droite ou non). On distingue deux sortes de roue dentée: les roues à denture extérieure et les roues à denture intérieure.

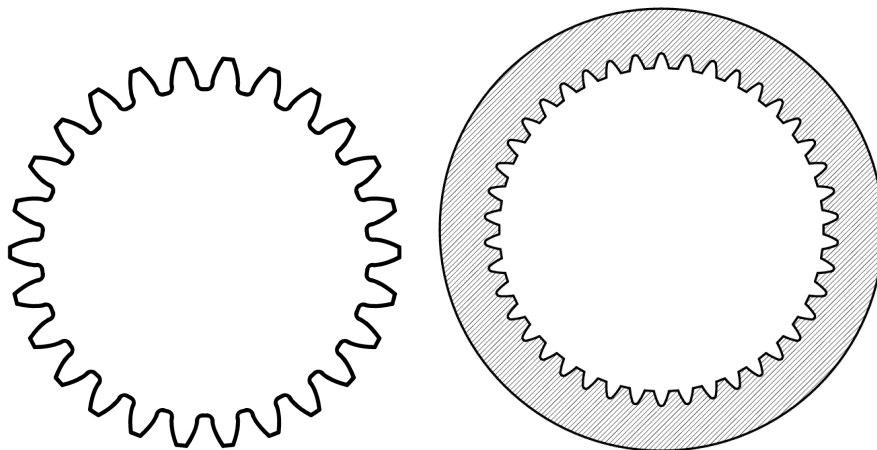


Figure 5: Roue à denture extérieur (gauche) et roue à denture intérieur (droite)

Chaque roue possède des caractéristiques importantes pour les études mécaniques:

- **Son diamètre primitif (d_i):** il s'agit du diamètre des points de contact de la roue lors de son entraînement, il n'est pas directement mesurable avec les outils de mesure traditionnels.
- **Son nombre de dents (Z_i):** il s'agit du nombre de dent autour de la roue dentée. Il existe plusieurs formes de dentures (droite, hélicoïdale ou à chevron) mais toute utiliseront la même modélisation pour les calculs de rapport de réduction. La forme des dents est le plus souvent en développante de cercle.
- **Son module (m_i):** Il s'agit de la taille de chaque dent, il est relié au diamètre primitif et au nombre de dent par la relation : $d_i = m_i \cdot Z_i$. Il est important de le connaître car deux roues dentée ne peuvent d'entraîner que si elles ont le même module.

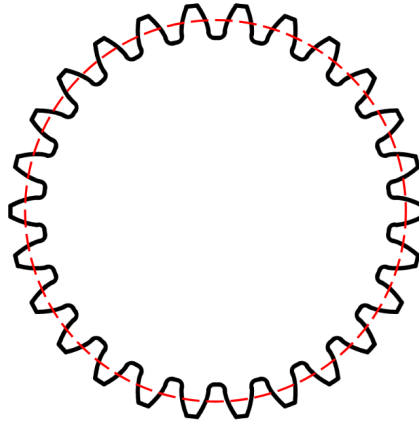


Figure 6: Diamètre primitif d'une roue dentée.

8.2 Engrenages

Un engrenage est une association de deux roues dentées, la présence des dents lie les mouvements des deux roues: on considère qu'au point de contact il y a **roulement sans glissement**.

8.2.1 Cas des engrenages à axes fixes

Le cas le plus courant est d'avoir des axes de rotation fixes dans un repère, la représentation de ce genre d'entraînement est:

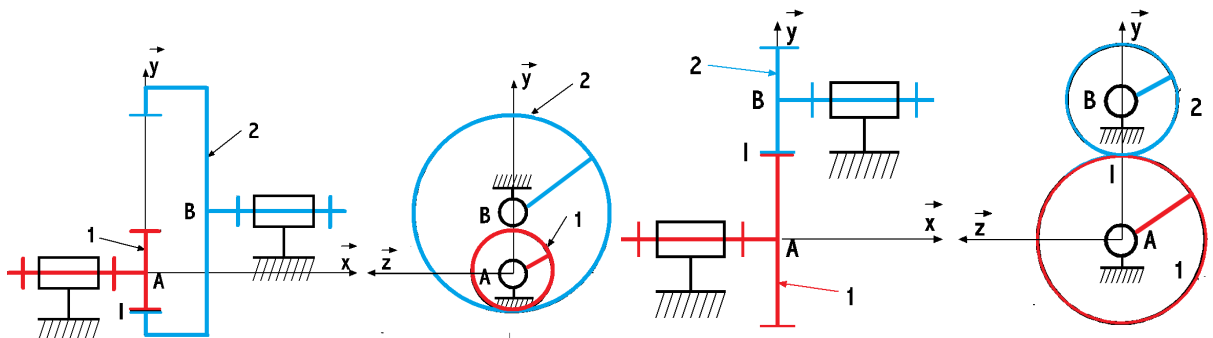


Figure 7: Schéma cinématique des engrenages.

Démonstration de la formule de réduction de vitesse On paramètre le système d'engrenage à denture externe:

$$\begin{aligned}
 \bullet \{ \mathcal{V}_{1/0} \} &= \begin{Bmatrix} \omega_{1/0} \cdot \vec{x} \\ 0 \end{Bmatrix} & \bullet \vec{IA} &= -\frac{d_1}{2} \cdot \vec{y} \\
 \bullet \{ \mathcal{V}_{2/0} \} &= \begin{Bmatrix} \omega_{2/0} \cdot \vec{x} \\ 0 \end{Bmatrix} & \bullet \vec{IB} &= \frac{d_2}{2} \cdot \vec{y}
 \end{aligned}$$

On utilise la condition de roulement sans glissement entre 2 et 1 au point I.

$$\vec{V}_{I \in 2/1} = \vec{0}$$

La vitesse est décomposable dans les mouvements connus:

$$\overrightarrow{V_{I \in 2/1}} = \overrightarrow{V_{I \in 2/0}} + \overrightarrow{V_{I \in 0/1}} = \overrightarrow{0}$$

On obtient donc:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{I \in 2/0}} - \overrightarrow{V_{I \in 1/0}} &= \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V_{I \in 2/0}} &= \overrightarrow{V_{I \in 1/0}}\end{aligned}$$

On rappelle la formule de Varignon permettant de trouver les vitesses en I:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{I \in 2/0}} &= \overrightarrow{V_{B \in 2/0}} + \overrightarrow{IB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \\ \overrightarrow{V_{I \in 2/0}} &= \overrightarrow{0} + \frac{d_2}{2} \cdot \overrightarrow{y} \wedge \omega_{2/0} \cdot \overrightarrow{x} = -\frac{d_2}{2} \cdot \omega_{2/0} \cdot \overrightarrow{z}\end{aligned}$$

Et:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{I \in 1/0}} &= \overrightarrow{V_{A \in 1/0}} + \overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ \overrightarrow{V_{I \in 1/0}} &= \overrightarrow{0} - \frac{d_1}{2} \cdot \overrightarrow{y} \wedge \omega_{1/0} \cdot \overrightarrow{x} = \frac{d_1}{2} \cdot \omega_{1/0} \cdot \overrightarrow{z}\end{aligned}$$

Remarque: Dans le cadre d'un contact interne, on change juste le signe sur le vecteur $\overrightarrow{IA}$, on aura donc juste un changement de signe sur le résultat final

La condition de roulement sans glissement se traduit donc :

$$\frac{d_1}{2} \cdot \omega_{1/0} \cdot \overrightarrow{z} = -\frac{d_2}{2} \cdot \omega_{2/0} \cdot \overrightarrow{z}$$

On projette sur $\overrightarrow{z}$ et on obtient la relation finale:

$$\frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = -\frac{d_1}{d_2}$$

• Loi des réducteurs à engrenages à contact externe

Le rapport de réduction d'un engrenage à axes fixes et contact externe est:

$$\frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = -\frac{d_1}{d_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}$$

Dans le cadre des contacts internes, la démonstration est la même, seul le sens du vecteur $\overrightarrow{IA}$ change:

• Loi des réducteurs à engrenages à contact interne

Le rapport de réduction d'un engrenage à axes fixes et contact interne est:

$$\frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$$

8.2.2 Train d'engrenages

Il est possible d'associer en cascade plusieurs engrenages en mettant sur un même arbre plusieurs roues dentées.

Le rapport de réduction $\frac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}}$ se détermine de manière simple dans le cadre où les **axes de rotation sont fixes**:

En écrivant les rapports de réductions intermédiaires $\frac{\omega_{4/0}}{\omega_{3/0}}$ et $\frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}}$ on obtient rapidement un résultat:

$$\begin{cases} \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = -\frac{Z_1}{Z_2} \\ \frac{\omega_{3/0}}{\omega_{2/0}} = 1 \\ \frac{\omega_{4/0}}{\omega_{3/0}} = -\frac{Z_4}{Z_3} \end{cases}$$

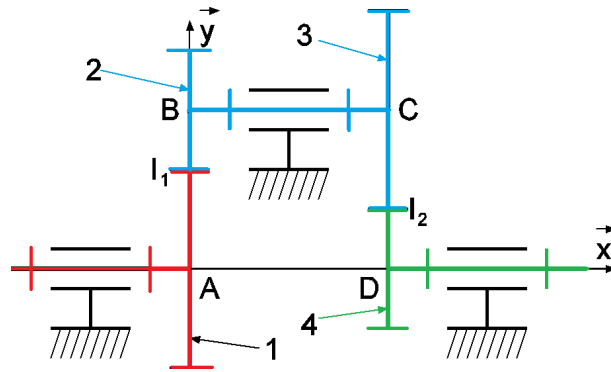


Figure 8: Exemple d'un train simple d'engrenage.

Le télescopage du rapport de réduction donne alors:

$$\frac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{\omega_{4/0}}{\omega_{3/0}} \cdot \frac{\omega_{3/0}}{\omega_{2/0}} \cdot \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = \left(-\frac{Z_1}{Z_2}\right) \cdot 1 \cdot \left(-\frac{Z_3}{Z_4}\right)$$

Et finalement:

$$\frac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_2 \cdot Z_4}$$

De cette manière il est possible de construire la formule générale dans le cadre de train d'engrenage à axes fixes:

• **Rapport de réduction d'un train d'engrenages à axes fixes**

$$\frac{\omega_{s/0}}{\omega_{e/0}} = (-1)^n \cdot \frac{\prod Z_{\text{roues menantes}}}{\prod Z_{\text{roues menées}}} = (-1)^n \cdot \frac{\prod d_{\text{roues menantes}}}{\prod d_{\text{roues menées}}}$$

Avec :

- n , le nombre de contacts externes du train.
- les roues menantes sont les roues du cotés du moteur pour chaque contact (internes ou externes).
- les roues menées sont les roues du cotés de la sortie pour chaque contact (internes ou externes).

Remarques : On fera attention bien prendre le nombre de dents de chaque roue et non pas le numéro permettant d'identifier la pièce.

Remarques : Dans le cadre de dentures coniques avec changement d'axe de rotation le $(-1)^n$ devient non pertinent mais la formule reste utiles pour une valeur absolue de rapport de réduction.

8.3 Poulie-courroie

Un réducteur par poulie courroie est un réducteur constitué de deux roues relié par une courroie. La courroie peut être remplacée par une chaîne et dans ce cas les roues seront dentées.

La représentation de ces réducteurs est:

En utilisant la rigidité de la courroie imposant une égalité de vitesse au point de contact (avec roulement sans glissement localement) on obtient la loi de vitesse:

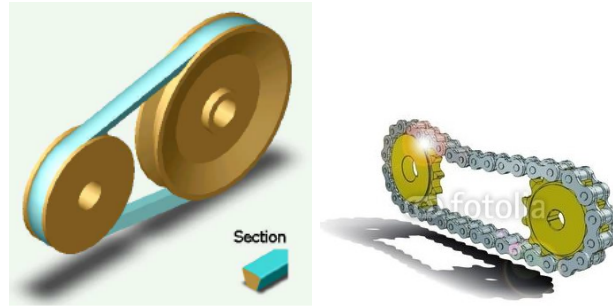


Figure 9: Réducteur poulie-courroie et pignon-chaine.

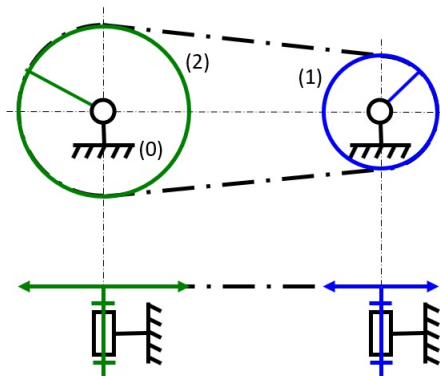


Figure 10: Schéma cinématique du réducteur

• **Rapport de réduction du réducteur poulie-courroie**

$$\frac{\omega_s}{\omega_e} = (-1)^n \frac{d_e}{d_i}$$

Avec :

- n : le nombre de croisement dans la courroie
- d_i : le diamètre de la roue i

8.4 Roue-vis sans fin

Pour avoir une grande réduction de vitesse il est possible d'utiliser un réducteur roue-vis sans fin: une vis tournant et entraînant une roue dentée.

Chaque tour de vis permet d'emporter avec n dents de la roue, n étant le nombre de filet de la vis.

On en déduit rapidement la loi de vitesse:

• **Rapport de réduction du réducteur poulie-courroie**

$$\frac{\omega_{roue}}{\omega_{vis}} = \frac{\text{nombre de filets}}{\text{nombre de dents}}$$

Il n'y a pas de signe car les axes de rotation sont différents.

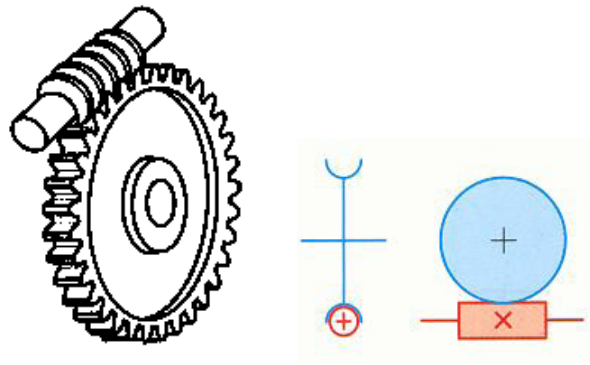


Figure 11: Réducteur roue-vis sans fin et schéma cinématique.

8.5 Train épicycloïdal

Un train épicycloïdal est un réducteur à engrenages utilisant la particularité d'utiliser des engrenages à axes variant lors du temps.

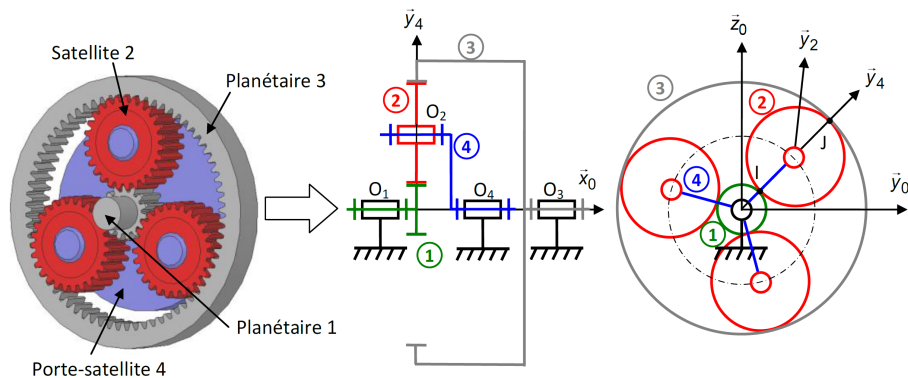


Figure 12: Train épicycloïdal.

Ce train possède 3 entrées-sorties avec des axes de rotations confondus.

La relation liants ces entrées sortie se trouve en faisant une étude en se plaçant dans le référentiel lié au porte satellite.

$$\omega_{plan.A} - k.\omega_{plan.B} + (k - 1).\omega_{ps} = 0$$

Avec $k = -\frac{Z_{Plan.A}}{Z_{Plan.B}}$.

8.6 Pignon-crémaillère

Pour transformer un mouvement de rotation en mouvement de translation, il est possible d'utiliser un système pignon-crémaillère composé d'une roue dentée et d'une crémaillère (réglette dentée).

La condition de roulement sans glissement au niveau du contact donne la relation entre les vitesses:

• Rapport de vitesse du système pignon crémaillère

$$\frac{V_{cremaillere}}{\omega_{roue}} = \frac{d_{roue}}{2} = r_{roue}$$



Figure 13: Système pignon crémaillère.

8.7 Système vis écrou

Un système vis écrou est un système transformant une rotation en translation grâce à une liaison hélicoïdale.

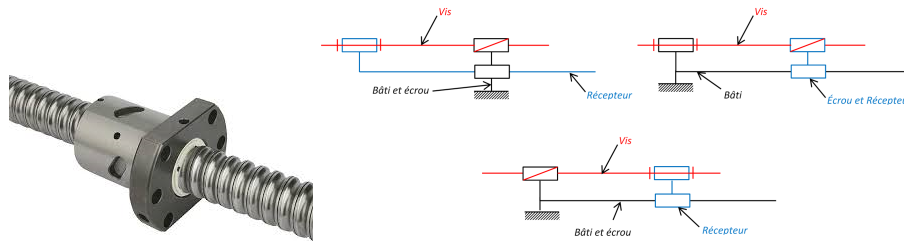


Figure 14: Système vis écrou et schéma cinématique.

On rappelle la loi cinématique de la liaison hélicoïdale:

- Loi de vitesse du système vis-écrou

$$\frac{V_{\text{écrou}}}{\omega_{\text{vis}}} = \frac{\text{pas de la vis}}{2\pi}$$