

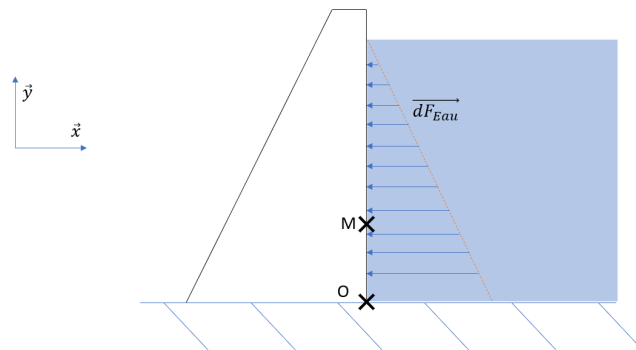


1 Calcul d'action mécanique

Un barrage hydraulique est un édifice permettant de retenir l'eau d'un écoulement, ces grands édifices ne doivent en aucun cas souffrir d'une défaillance sous peine de mettre en danger de nombreuses personnes.



On désire donc pouvoir prédire l'effort qu'aura l'eau à son niveau maximal. Voici un schéma montrant la répartition des efforts sur la hauteur du barrage:



On prendra:

- $\overrightarrow{OM} = y.\vec{y} + z.\vec{z}$
- $d\overrightarrow{F_{eau}}(M) = -(L - y).K.dS.\vec{x}$
- La largeur du barrage est 1
- La répartition de la pression de l'eau est homogène sur toute l'épaisseur du barrage

Question 1 Calculez le torseur de l'effort de l'eau sur le barrage et l'exprimer au point O.

Par définition :

$$\{\mathcal{T}_{eau \rightarrow barrage}\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{eau \rightarrow barrage}} = \int_{Surface} d\overrightarrow{F_{eau}}(M) \\ \overrightarrow{M_{O,eau \rightarrow barrage}} = \int_{Surface} \overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{F_{eau}}(M) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{Surface} -(L - y).K.dS.\vec{x} \\ \int_{Surface} (y.\vec{y} + z.\vec{z}) \wedge (-(L - y).K.dS.\vec{x}) \end{array} \right\}$$

On est en coordonné cartésienne :

$$\overrightarrow{OM} = y.\vec{y} + z.\vec{z}$$

Avec:

- $y \in [0, L]$
- $z \in [-l/2, l/2]$

En faisant varier y et z, on décrit une surface dS et on peut alors écrire:

$$dS = dy.dz$$

On peut alors calculer le torseur (en faisant bien attention aux bornes des intégrales):

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R_{eau \rightarrow barrage}} &= \int_{Surface} \overrightarrow{dF_{eau}(M)} = \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^L -(L-y).K.\vec{x}.dy.dz \\ &= -K.\vec{x} \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^L (L-y).dy.dz = -K.\vec{x} \int_{-l/2}^{l/2} \left[(L.y - \frac{y^2}{2}) \right]_{y=0}^{y=L}.dz = -K.\vec{x} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{L^2}{2}.dz \\ &= -K.\vec{x} \frac{L^2}{2} \int_{-l/2}^{l/2} .dz = -K.\vec{x} \frac{L^2}{2} . [z]_{z=-l/2}^{z=l/2} = -K.\frac{L^2}{2} .l.\vec{x} \end{aligned}$$

Le calcul du moment se fait ensuite :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{O,eau \rightarrow barrage}} &= \int_{Surface} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dF_{eau}(M)} = \int_{Surface} (y.\vec{y} + z.\vec{z}) \wedge (-(L-y).K.dS.\vec{x}) \\ &= \int_{Surface} ((L-y).y.K.\vec{z}.dS) + \int_{Surface} (-(L-y).z.K.\vec{y}.dS) \\ &= \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^L (L-y).y.K.\vec{z}.dy.dz - \int_0^L \int_{-l/2}^{l/2} (L-y).z.K.\vec{y}.dz.dy \\ &= K.\vec{z} . \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^L (L.y - y^2).dy.dz - K.\vec{y} . \int_0^L (L-y) \int_{-l/2}^{l/2} z.dz.dy \\ &= K.\vec{z} . \int_{-l/2}^{l/2} \left[\frac{L.y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=L}.dz - K.\vec{y} . \int_0^L (L-y) . \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=-l/2}^{z=l/2} .dy \\ &= K.\vec{z} . \int_{-l/2}^{l/2} \frac{L^3}{6}.dz - K.\vec{y} . \int_0^L (L-y).0.dy \\ &= K.\frac{L^3}{6}.\vec{z} . \int_{-l/2}^{l/2} .dz - \vec{0} = K.\frac{L^3}{6} .l.\vec{z} \end{aligned}$$

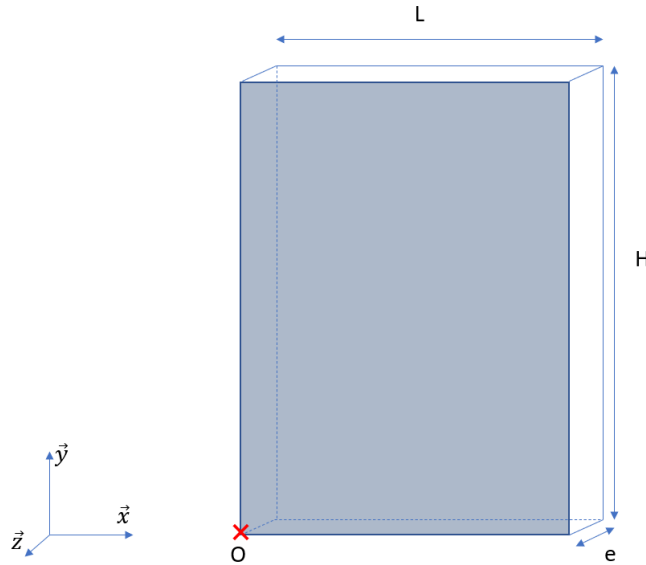
Cela donne :

$$\{\mathcal{T}_{eau \rightarrow barrage}\}_O = \begin{Bmatrix} -K.\frac{L^2}{2}.l.\vec{x} \\ K.\frac{L^3}{6}.l.\vec{z} \end{Bmatrix}$$

2 Calcul de volume et de centre de gravité

On souhaite motoriser l'ouverture de la porte d'un bâtiment, le but est de prévoir le poids théorique de cette porte.

Voici la géométrie de la porte:



Question 2 Calculez le poids de la porte, sachant que sa masse volumique ρ est homogène.

Par définition :

$$\vec{P} = \int_{\text{Volume}} -\rho \cdot g \cdot \vec{y} \cdot dV$$

Le vecteur position est défini par :

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{y} + z \cdot \vec{z}$$

Avec :

- $x \in [0, L]$
- $y \in [0, H]$
- $z \in [-e, 0]$

En faisant varier x, y et z on décrit un petit volume:

$$dS = dx \cdot dy \cdot dz$$

On trouve alors :

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \int_{\text{Volume}} -\rho \cdot g \cdot \vec{y} \cdot dV = \int_{-e}^0 \int_0^H \int_0^L -\rho \cdot g \cdot \vec{y} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = -\rho \cdot g \cdot \vec{y} \cdot \int_{-e}^0 \int_0^H \int_0^L dx \cdot dy \cdot dz \\ &= -\rho \cdot g \cdot \vec{y} \cdot \int_{-e}^0 \int_0^H [x]_{x=0}^{x=L} \cdot dy \cdot dz = -\rho \cdot g \cdot L \cdot \vec{y} \cdot \int_{-e}^0 \int_0^H dy \cdot dz = -\rho \cdot g \cdot L \cdot \vec{y} \cdot \int_{-e}^0 [y]_{y=0}^{y=H} \cdot dz \\ &= -\rho \cdot g \cdot L \cdot H \cdot \vec{y} \cdot \int_{-e}^0 dz = -\rho \cdot g \cdot L \cdot H \cdot \vec{y} \cdot [z]_{z=-e}^{z=0} = -\rho \cdot g \cdot L \cdot H \cdot e \cdot \vec{y} \\ \vec{P} &= -\rho \cdot g \cdot L \cdot H \cdot e \cdot \vec{y} \end{aligned}$$