

Proposition de corrigé

Concours : **ATS**

Année : **2014**

Filière : **ATS**

Épreuve : **Sciences Industrielles pour l'Ingénieur**

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](#) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles).

La distribution et la publication de ce document sont strictement interdites !

Conditions de diffusion

Ce document n'a pas vocation à être diffusé, et sa consultation est exclusivement réservée aux adhérents de l'UPSTI.

Les adhérents peuvent en revanche s'en inspirer librement pour toute utilisation pédagogique.

Si vous constatez que ce document est disponible en téléchargement sur un site tiers, veuillez s'il vous plaît nous en informer [à cette adresse](#), afin que nous puissions protéger efficacement le travail de nos adhérents.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

L'équipe UPSTI

Véhicule Auto Guidé (VAG) du Centre Hospitalier Universitaire de Dijon

Q1. Expression de la résultante dynamique du chariot par rapport au sol :

$$\overrightarrow{D}_{Ch/0} = M \overrightarrow{a}_{G_{Ch},Ch/0} = M \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{V}_{G_{Ch},Ch/0} \right]_{R_0}$$

$$\overrightarrow{V}_{G_{Ch},Ch/0} = \left[\frac{d(\overrightarrow{OG}_{Ch})}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EG}_{Ch})}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d \left(x\vec{x} + (h+r)\vec{y} + \frac{L}{2}\vec{x} + \frac{h_{Ch}}{2}\vec{y} \right)}{dt} \right]_{R_0} = \dot{x}\vec{x}$$

Donc : $\overrightarrow{D}_{Ch/0} = M \left[\frac{d(\dot{x}\vec{x})}{dt} \right]_{R_0}$

On en déduit que : $\overrightarrow{D}_{Ch/0} = M\ddot{x}\vec{x}$ (le mouvement du chariot par rapport au sol est une translation rectiligne suivant \vec{x}).

Q2. $\overrightarrow{\delta}_{G_{Ch},Ch/0} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma}_{G_{Ch},Ch/0} \right]_{R_0}$ et $\overrightarrow{\sigma}_{G_{Ch},Ch/0} = [I(G_{Ch}, Ch)] \overrightarrow{\Omega}_{Ch/0}$

Or $\overrightarrow{\Omega}_{Ch/0} = \vec{0}$ car le mouvement du chariot par rapport au sol est une translation rectiligne (on se place juste avant le basculement) donc $\overrightarrow{\sigma}_{G_{Ch},Ch/0} = \vec{0}$.

On déduit que $\overrightarrow{\delta}_{G_{Ch},Ch/0} = \vec{0}$

En utilisant la relation de changement de point des moments, on obtient :

$$\overrightarrow{\delta}_{E,Ch/0} = \overrightarrow{\delta}_{G_{Ch},Ch/0} + \overrightarrow{EG}_{Ch} \wedge \overrightarrow{D}_{Ch/0} = \vec{0} + \left(\frac{L}{2}\vec{x} + \frac{h_{Ch}}{2}\vec{y} \right) \wedge M\ddot{x}\vec{x}$$

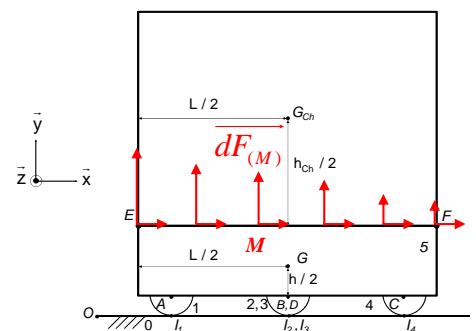
D'où : $\overrightarrow{\delta}_{E,Ch/0} = -\frac{h_{Ch}}{2} M\ddot{x}\vec{z}$.

Q3. En phase d'accélération, tant qu'il n'y a pas basculement, le contact avec frottement entre 5 et le chariot est plan. Les actions mécaniques de 5 sur le chariot peuvent donc être représentées par la modélisation locale ci-contre.

Le moment au point E de toutes ces forces $\overrightarrow{M}_{E,5 \rightarrow Ch} = \int_S \overrightarrow{EM} \wedge d\overrightarrow{F}_{(M)}$

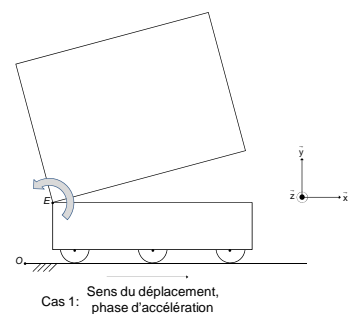
est donc porté par \vec{z} et positif. On peut donc en déduire que :

$M_{E,5 \rightarrow Ch} \cdot z > 0$



Autre méthode : en cas de basculement, le contact entre 5 et le chariot devient linéique. La liaison entre 5 et le chariot serait donc une liaison linéaire rectiligne de normale \vec{y} et d'axe (E, \vec{z}) , avec frottement, d'où :

$$T_{5 \rightarrow Ch} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{5 \rightarrow Ch} & L_{5 \rightarrow Ch} \\ Y_{5 \rightarrow Ch} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{E, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$



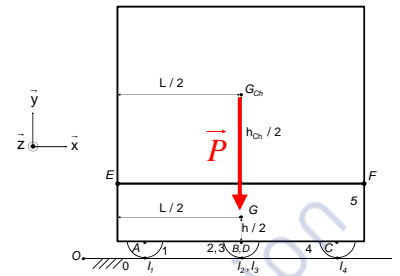
Or, pour garder le contact plan entre **5** et le chariot (condition de non basculement), il faut que la liaison soit une liaison appui plan de normale \vec{y} , avec frottement, d'où :

$$T_{5 \rightarrow Ch} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{5 \rightarrow Ch} & L_{5 \rightarrow Ch} \\ Y_{5 \rightarrow Ch} & 0 \\ 0 & N_{5 \rightarrow Ch} \end{array} \right\}_{E, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

On en déduit que la composante de moment suivant \vec{z} doit être non nulle pour qu'il n'y ait pas basculement : $N_{5 \rightarrow Ch} = \overline{M}_{E,5 \rightarrow Ch} \cdot \vec{z} \neq 0$

De plus, si cette composante existe, elle s'opposera au moment dû à l'action de pesanteur en G_{Ch} qui est négative suivant \vec{z} . On déduit donc que :

$$\overline{M}_{E,5 \rightarrow Ch} \cdot \vec{z} > 0.$$



Q4. Bilan des actions mécaniques extérieures exercées sur le chariot :

$$T_{5 \rightarrow Ch} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{5 \rightarrow Ch} & L_{5 \rightarrow Ch} \\ Y_{5 \rightarrow Ch} & 0 \\ 0 & N_{5 \rightarrow Ch} \end{array} \right\}_{E, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad \text{et} \quad T_{pes \rightarrow Ch} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -Mg & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{G_{Ch}, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Théorème du moment dynamique appliqué au chariot au point E en projection sur \vec{z} :

$$\overline{M}_{E,5 \rightarrow Ch} \cdot \vec{z} + \overline{M}_{E,pes \rightarrow Ch} \cdot \vec{z} = \overline{\delta}_{E,Ch/0} \cdot \vec{z}$$

Calcul de $\overline{M}_{E,pes \rightarrow Ch}$:

$$\overline{M}_{E,pes \rightarrow Ch} = \overline{M}_{G_{Ch},pes \rightarrow Ch} + \overline{EG}_{G_{Ch}} \wedge (-Mg \vec{y}) = \left(\frac{L}{2} \vec{x} + \frac{h_{Ch}}{2} \vec{y} \right) \wedge (-Mg \vec{y}) = -\frac{L}{2} Mg \vec{z}$$

$$D'où : \overline{M}_{E,5 \rightarrow Ch} \cdot \vec{z} - \frac{L}{2} Mg = -\frac{h_{Ch}}{2} M \ddot{x}$$

$$\overline{M}_{E,5 \rightarrow Ch} \cdot \vec{z} = \frac{L}{2} Mg - \frac{h_{Ch}}{2} M \ddot{x}$$

$$\text{Condition de non basculement du chariot : } \overline{M}_{E,5 \rightarrow Ch} \cdot \vec{z} > 0 \text{ donc } \frac{L}{2} Mg - \frac{h_{Ch}}{2} M \ddot{x} > 0$$

On en déduit donc la relation que doit satisfaire \ddot{x} pour éviter le basculement du chariot par rapport au VAG :

$$\ddot{x} < \frac{L}{h_{Ch}} g \text{ d'où } a_{\max 1} = \frac{L}{h_{Ch}} g.$$

Q5. Application numérique : $a_{\max 1} = \frac{L}{h_{Ch}} g = \frac{1441}{1800} \times 9,81 = 7,85 \text{ m.s}^{-2}$

Cahier des charges : accélération maximale assurant le non dérapage : $3,6 \text{ m.s}^{-2}$

La valeur de l'accélération qui satisfait aux deux critères de non basculement et de non dérapage est donc : $3,6 \text{ m.s}^{-2}$.

Q6. $r_1 = \frac{\omega_{1/6}}{\omega_{7/6}} = (-1)^2 \frac{Z_7}{Z_8} \frac{Z_9}{Z_{10}} \frac{Z_{10}}{Z_1}$ d'où : $r_1 = \frac{Z_7}{Z_8} \frac{Z_9}{Z_1}$.

Application numérique : $r_1 = \frac{9}{38} \times \frac{19}{108} = \frac{1}{24}$.

Q7. Composition des vecteurs vitesse de rotation :

$$\vec{\Omega}_{1/0} \cdot \vec{z} = (\vec{\Omega}_{1/6} + \vec{\Omega}_{6/5} + \vec{\Omega}_{5/0}) \cdot \vec{z}$$

$$\omega_{1/0} = \omega_{1/6} + \omega_{6/5} + \omega_{5/0}$$

Or $\vec{\Omega}_{5/0} \cdot \vec{z} = \omega_{5/0} = 0$ car le chariot est en mouvement de translation rectiligne.

Et $\vec{\Omega}_{6/5} \cdot \vec{z} = \omega_{6/5} = 0$ car il n'y a pas de mouvement relatif entre **6** et **5**.

D'où : $\omega_{1/0} = \omega_{1/6}$. Avec un même raisonnement, on en déduit que : $\omega_{7/0} = \omega_{7/6}$.

Q8. Condition de roulement sans glissement : $\vec{V}_{I_1,1/0} = \vec{0}$

Or $\vec{V}_{I_1,1/0} = \vec{V}_{A,1/0} + \vec{I_1 A} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$ donc $\vec{0} = \vec{V}_{A,1/0} + \vec{I_1 A} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$

Calcul de $\vec{V}_{A,1/0}$: $\vec{V}_{A,1/0} = \vec{V}_{A,1/6} + \vec{V}_{A,6/5} + \vec{V}_{A,5/0}$

$\vec{V}_{A,1/6} = \vec{0}$ car A appartient à l'axe de rotation de la liaison pivot **1/6**

$\vec{V}_{A,6/5} = \vec{0}$ car il n'y a pas de mouvement relatif entre **6** et **5**.

Donc : $\vec{V}_{A,1/0} = \vec{V}_{A,5/0} = \dot{x}\vec{x}$

$$\vec{0} = \dot{x}\vec{x} + r\vec{y} \wedge \omega_{1/0}\vec{z}$$

$$\vec{0} = \dot{x}\vec{x} + r\omega_{1/0}\vec{x} \text{ donc } \dot{x} = -r\omega_{1/0}$$

Or $\omega_{1/0} = \omega_{1/6}$ donc : $\dot{x} = -r\omega_{1/6}$.

Or $r_1 = \frac{\omega_{1/6}}{\omega_{7/6}}$ donc : $\dot{x} = -rr_1\omega_{7/6}$.

Q9. Une seule inconnue est recherchée donc une seule équation est nécessaire. L'application du PFD serait trop longue et inutile. (Méthode classique pour rechercher un couple moteur).

Q10. $E_{S1/0} = E_{1/0} + E_{7/0}$ car les inerties et les masses des éléments **8, 9, 10, 8', 9', 10', 8'', 9''** et **10''** sont négligées.

Calcul de $E_{1/0}$: $E_{1/0} = \frac{1}{2} \{C_{1/0}\}_A \otimes \{V_{1/0}\}_A$

$$E_{1/0} = \frac{1}{2} \left[m_1 \|\vec{V}_{A,1/0}\|^2 + \vec{\Omega}_{1/0} \cdot \left[I(A,1) \vec{\Omega}_{1/0} \right] \right] \text{ avec } A \text{ le centre de gravité de } \mathbf{1}.$$

$$E_{1/0} = \frac{1}{2} \left[m_1 \dot{x}^2 + J_1 \omega_{1/0}^2 \right]$$

Calcul de $E_{7/0}$: même raisonnement en considérant que le centre de gravité de **7** est A :

$$E_{7/0} = \frac{1}{2} \left[m_7 \dot{x}^2 + J_7 \omega_{7/0}^2 \right]$$

$$\text{Donc : } E_{S1/0} = \frac{1}{2} \left[(m_1 + m_7) \dot{x}^2 + J_1 \omega_{1/0}^2 + J_7 \omega_{7/0}^2 \right]$$

$$E_{S1/0} = \frac{1}{2} \left[(m_1 + m_7) \dot{x}^2 + J_1 \omega_{1/6}^2 + J_7 \omega_{7/6}^2 \right]$$

$$\text{Or } \dot{x} = -r\omega_{1/6} \text{ et } \dot{x} = -rr_1\omega_{7/6} \text{ donc : } E_{S1/0} = \frac{1}{2} \left[(m_1 + m_7) \dot{x}^2 + J_1 \frac{\dot{x}^2}{r^2} + J_7 \frac{\dot{x}^2}{r^2 r_1^2} \right]$$

$$E_{S1/0} = \frac{1}{2} \left[m_{S1} + \frac{J_1}{r^2} + \frac{J_7}{r^2 r_1^2} \right] \dot{x}^2 = \frac{1}{2} M_{eq} \dot{x}^2 \text{ donc } M_{eq} = m_{S1} + \frac{J_1}{r^2} + \frac{J_7}{r^2 r_1^2}$$

Application numérique : $M_{eq} = 49 \text{ kg}$.

Q11. Puissance des actions mécaniques du stator sur l'arbre moteur :

$$P_{m \rightarrow 7} = \{T_{m \rightarrow 7}\}_A \otimes \{V_{7/0}\}_A = C_m \vec{z} \cdot \vec{\Omega}_{7/0} = C_m \omega_{7/0}. \text{ Donc : } P_{m \rightarrow 7} = C_m \omega_{7/6}.$$

Q12. Erreur d'énoncé : il s'agit de $P_{sol \rightarrow 1}$

Roulement sans glissement au point I_1 donc $P_{sol \rightarrow 1} = 0$, il n'y a pas de puissance perdue.

$$\text{En effet : } P_{sol \rightarrow 1} = \{T_{sol \rightarrow 1}\}_{I_1} \otimes \{V_{1/0}\}_{I_1}$$

$$\text{avec : } \{T_{sol \rightarrow 1}\}_{I_1} = \begin{Bmatrix} X_{0 \rightarrow 1} & L_{0 \rightarrow 1} \\ Y_{0 \rightarrow 1} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{I_1, (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} : \text{ le contact roue/sol se fait selon une ligne (donc liaison linéaire rectiligne) et il y a adhérence entre la roue et le sol}$$

$$\text{et : } \{V_{1/0}\}_{I_1} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{1/0} & 0 \end{Bmatrix}_{I_1, (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} : \text{ condition de roulement sans glissement } \vec{V}_{I_1, 1/0} = \vec{0}$$

$$\mathbf{Q13. } P_{g \rightarrow S1} = P_{g \rightarrow 1} + P_{g \rightarrow 7} = \{T_{g \rightarrow 1}\}_A \otimes \{V_{1/0}\}_A + \{T_{g \rightarrow 7}\}_A \otimes \{V_{7/0}\}_A$$

$$P_{g \rightarrow S1} = \begin{Bmatrix} -m_1 g \bar{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A \otimes \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{1/0} \\ \dot{\bar{x}} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} -m_7 g \bar{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A \otimes \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{7/0} \\ \dot{\bar{x}} \end{Bmatrix}_A$$

D'où : $P_{g \rightarrow S1} = 0$ (il n'y a pas de changement d'altitude).

$$\mathbf{Q14.} \text{ Théorème de l'énergie cinétique appliqué à S1 : } \left[\frac{d}{dt} E_{S1/0} \right]_{R_0} = P_{S1 \rightarrow S1} + P_{\text{int} S1}$$

$$\left[\frac{d}{dt} E_{S1/0} \right]_{R_0} = P_{m \rightarrow 7} + P_{sol \rightarrow 1} + P_{g \rightarrow S1} + P_{6 \rightarrow S1} + P_p$$

$$M_{eq} \ddot{x} = C_m \omega_{7/6} + (m_{S1} - M_t) \ddot{x} - \frac{C_f}{rr_1} \dot{x}$$

$$M_{eq} \ddot{x} = C_m \frac{-\dot{x}}{rr_1} + (m_{S1} - M_t) \ddot{x} - \frac{C_f}{rr_1} \dot{x}$$

$$rr_1 M_{eq} \ddot{x} = -C_m + rr_1 (m_{S1} - M_t) \ddot{x} - C_f$$

$$\text{Donc : } C_m = rr_1 (m_{S1} - M_t - M_{eq}) \ddot{x} - C_f.$$

$$\text{Remarque : } C_m = -3,26\ddot{x} - 3,29$$

Si $\ddot{x} > 0$, $C_m < 0$ (en accord avec le paramétrage).

$$\mathbf{Q15.} \text{ D'après la courbe, on peut en déduire que } d_f = \frac{1}{2} V_{\max} t_3 \text{ donc } t_3 = \frac{2d_f}{V_{\max}}.$$

$$\text{Application numérique : } t_3 = 0,33 \text{ s}.$$

$$\mathbf{Q16.} \text{ Mouvement uniformément décéléré donc : } a_d = \frac{-V_{\max}}{t_3}.$$

$$\text{Application numérique : } a_d = -3,6 \text{ m.s}^{-2}.$$

Le cahier des charges impose une accélération maximale assurant le non dérapage de $3,6 \text{ m.s}^{-2}$ (en valeur absolue). La valeur obtenue est donc compatible avec le cahier des charges.

Q17. $C_{\max} = 3,26|a_d| - 3,29$

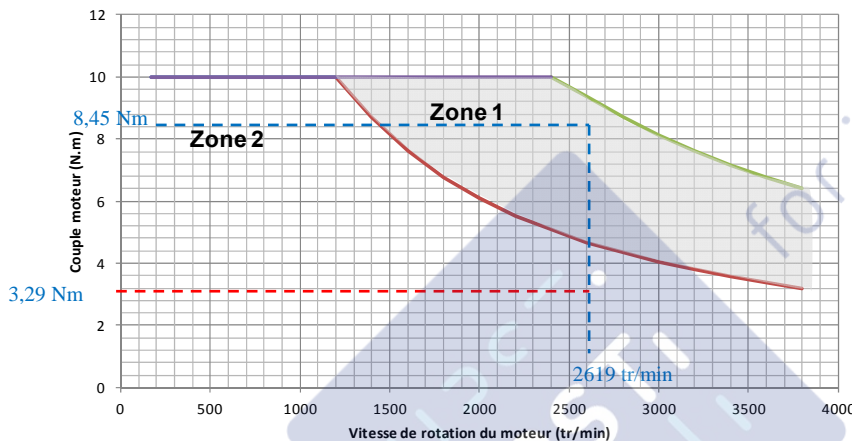
$C_{\max} = 8,45 \text{ Nm}$.

Remarque : $C_{\max} > 0$ car freinage, donc en accord avec le paramétrage.

Q18. En phase de décélération, le point de fonctionnement correspondant à C_{\max} et à N_{\max} se trouve dans la zone 1. Or cette phase dure $t_3 = 0,33 \text{ s} < 1 \text{ min}$. De plus, au cours de cette phase, la vitesse décroît (donc le fonctionnement ne reste pas qu'en zone 1).

En phase de vitesse constante, le point de fonctionnement correspondant à $|C_m| = 3,29 \text{ Nm}$ et à N_{\max} se trouve dans la zone 2. La durée maximale de 90 min semble amplement suffisante (au regard des dimensions des couloirs des CHU).

On peut donc conclure que le moteur choisi convient.



Q19. Pour une machine asynchrone $\Omega_s = \frac{2\pi f}{p}$ (Ω_s étant la vitesse du champ statorique).

Soit $\frac{2\pi N_s}{60} = \frac{2\pi f}{p} \Leftrightarrow N_s = \frac{60f}{p}$.

Q20. Le glissement est défini par $g = \frac{N_s - N}{N_s}$.

Au maximum le glissement est de l'ordre de 6%, on peut faire l'hypothèse que $N \approx N_s$.

Dans ces conditions $p \approx \frac{60f}{N} = 2,13 \Rightarrow p = 2$.

On a donc pour N_s : $N_s = \frac{60 \times 110}{2} \Leftrightarrow N_s = 3300 \text{ tr/min}$.

Autre méthode : on détermine les différentes valeurs de la vitesse du champ statorique pour différente valeur de nombre e paires de pôles p . Comme le glissement g est faible, on prendra la valeur immédiatement supérieur à la vitesse nominale du rotor.

p	$N_s \text{ (tr/min)}$	$N_N \text{ (tr/min)}$
1	6600	3100
2	3300	3100
3	2200	3100

On en déduit que $p = 2$

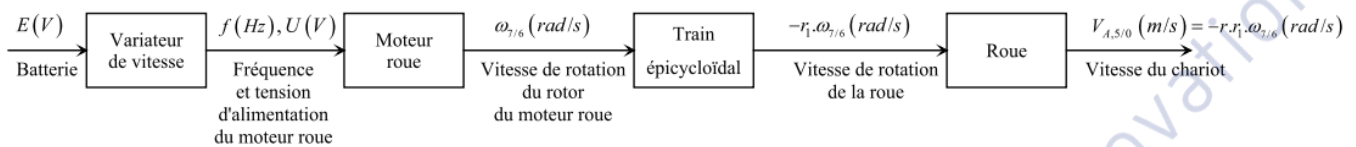
Le tableau est donné pour une fréquence de 110 Hz.

$$\text{Q21. } g_N = \frac{N_S - N_N}{N_S} = \frac{3300 - 3100}{3300} \Leftrightarrow g_N = 6\% .$$

La puissance indiquée sur la plaque signalétique correspond à la puissance mécanique fournie par le moteur au point de fonctionnement nominal.

$$P_{UN} = C_N \Omega_N \Leftrightarrow C_N = \frac{60 P_{UN}}{2\pi N_N} = \frac{60 \times 850}{2\pi \times 3100} \Leftrightarrow C_N = 2,62 \text{ Nm} .$$

Q22. On peut représenter la solution technique utilisée par la figure suivante :



$$\text{On } \omega_{7/6} = -\frac{2\pi N}{60} = -\frac{2\pi N_S}{60}(1-g) \Leftrightarrow \omega_{7/6} = -\frac{2\pi f}{p}(1-g) . \text{ Le signe moins est là car } \omega_{7/6} < 0 .$$

$$\text{En remplaçant dans l'expression de } V_{A,5/0} : V_{A,5/0} = \frac{2\pi \cdot r \cdot r_1 \cdot f}{p}(1-g) .$$

$$\text{Q23. En admettant que le glissement est constant } V_{A,5/0} = \frac{2\pi \cdot r \cdot r_1 \cdot (1-g)}{p} f = K \cdot f \quad K = \frac{2\pi \cdot r \cdot r_1 \cdot (1-g)}{p} .$$

$$\text{AN : } K = 13,2 \text{ mm} .$$

Pour la plage de fréquence :

$$0,1 \text{ m/s} \leq V_{A,5/0} \leq 1,2 \text{ m/s} \Leftrightarrow \frac{0,1}{K} \text{ Hz} \leq f \leq \frac{1,2}{K} \text{ Hz} \Leftrightarrow 7,6 \text{ Hz} \leq f \leq 91 \text{ Hz} .$$

Remarque : une fréquence de 91 Hz correspond à une vitesse du rotor du moteur de 2620 tr/min .

Q24. L'énoncé indique que la vitesse maximale est de +2620 tr/min . La consigne vitesse est donnée à l'aide d'un mot de 16 bits en binaire signé avec un facteur d'échelle de 0,25 tr/min .

Pour $-32768 = (1000\ 0000\ 0000\ 0000)_2$, on a une vitesse de -8192 tr/min .

Pour $0 = (0000\ 0000\ 0000\ 0000)_2$, on a une vitesse de 0 tr/min .

$$\text{On veut fixer la vitesse à } +2620 \text{ tr/min} , \text{ il faut donc saisir la valeur : } \frac{2620}{8192} \times 32768 = 10480 .$$

$$10480 = (0010\ 1000\ 1111\ 0000)_2$$

$$\text{Byte 0} = (0010\ 1000)_2 \quad \text{Byte 1} = (1111\ 0000)_2 .$$

Q25. Le rapport U/f vaut $14,5/110 = 0,132 \text{ V.s}$.

La plage de la tension efficace U est $1 \text{ V} \leq U \leq 12 \text{ V}$.

Elle est compatible avec la source de tension disponible 24 V (plage de tension de sortie de 0 à 16 VAC pour une plage de tension d'entrée du variateur de e 17 à 30 VDC) .

Q26. Les numéros des paramètres fixant l'accélération et la décélération sont 133 et 134.

L'unité attendue est $\text{tr.min}^{-1}.\text{s}^{-1}$.

$$\text{Q27. } a_{\max 5/0} = \frac{1,2}{2} = 0,6 \text{ m/s}^2 .$$

On en déduit la valeur de l'accélération angulaire du moteur $|\dot{\omega}_{7/6}| = \left| \frac{a_{\max 5/0}}{r.r_1} \right| = 137,1 \text{ rad/s}^2 .$

On convertit cette valeur en $\text{tr.min}^{-1} . \text{s}^{-1}$: $|\dot{\omega}_{7/6}| = -\frac{60}{2\pi} 137,1 = 1310 \text{ tr.min}^{-1} . \text{s}^{-1} .$

Le paramètre 133 sera fixé à 1310.

Q28. La variation de vitesse est la même mais sur une durée 6 fois plus petite. La valeur de la décélération sera donc 6 fois plus grande en valeur absolue que la valeur d'accélération. Le paramètre 134 sera fixé à 7866 (6x1310).

Q29. Fermeture géométrique, cycle KNMLK :

$$\overline{KN} + \overline{NM} + \overline{ML} + \overline{LK} = \vec{0} \text{ donc } L_3 \vec{x} + L_1 \vec{z}_4 - L_2 \vec{x}_{12} - L_1 \vec{z}_1 = \vec{0}$$

En projection sur \vec{x} : $(L_3 \vec{x} + L_1 \vec{z}_4 - L_2 \vec{x}_{12} - L_1 \vec{z}_1) \cdot \vec{x} = 0$

$$L_3 + L_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_4\right) - L_2 \cos \beta - L_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right) = 0$$

$$L_3 + L_1 \sin \alpha_4 - L_2 \cos \beta - L_1 \sin \alpha_1 = 0 \quad (\text{a})$$

En projection sur \vec{z} : $(L_3 \vec{x} + L_1 \vec{z}_4 - L_2 \vec{x}_{12} - L_1 \vec{z}_1) \cdot \vec{z} = 0$

$$L_1 \cos \alpha_4 - L_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + L_1 \cos \alpha_1 = 0$$

$$L_1 \cos \alpha_4 - L_2 \sin \beta + L_1 \cos \alpha_1 = 0 \quad (\text{b})$$

Q30.

(a) donne $L_2 \cos \beta = L_3 + L_1 (\sin \alpha_4 - \sin \alpha_1)$ et (b) donne $L_2 \sin \beta = L_1 (\cos \alpha_4 + \cos \alpha_1)$

En élevant au carré et en additionnant les deux relations membre à membre :

$$L_2^2 (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) = L_3^2 + L_1^2 \left[(\sin \alpha_4 - \sin \alpha_1)^2 + (\cos \alpha_4 + \cos \alpha_1)^2 \right] + 2L_3L_1 (\sin \alpha_4 - \sin \alpha_1)$$

$$L_2^2 = L_3^2 + L_1^2 [2 - 2 \sin \alpha_4 \sin \alpha_1 + 2 \cos \alpha_4 \cos \alpha_1] + 2L_3L_1 (\sin \alpha_4 - \sin \alpha_1)$$

$$L_2^2 - L_3^2 - 2L_1^2 + 2L_3L_1 \sin \alpha_1 = 2L_1^2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_4 - 2L_1^2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_4 + 2L_3L_1 \sin \alpha_4$$

$$2L_1^2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_4 - \left(2(L_1^2 \sin \alpha_1 - L_1L_3) \right) \sin \alpha_4 = L_2^2 - 2L_1^2 - L_3^2 + 2L_3L_1 \sin \alpha_1$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{A'} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{B'} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{C'}$$

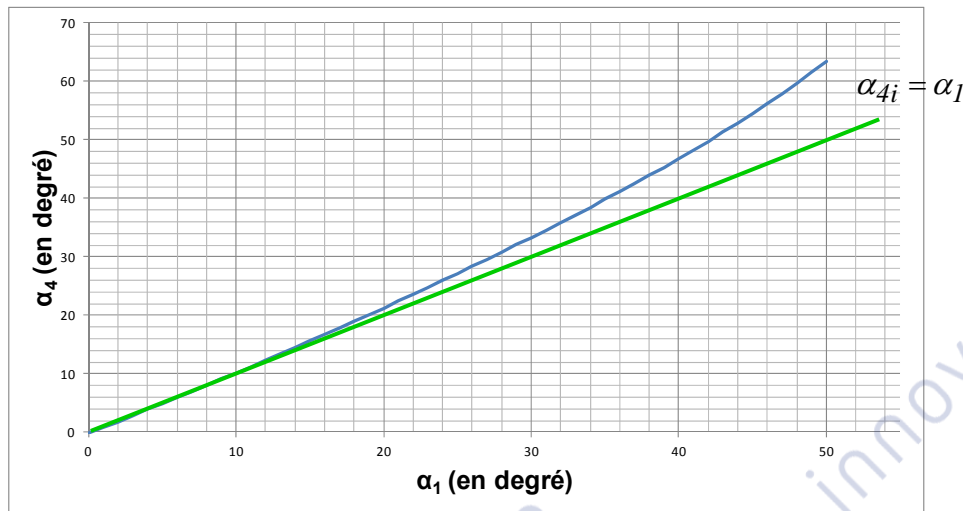
On obtient alors : $A' \cos \alpha_4 - B' \sin \alpha_4 = C' .$

Q31. La relation donnée dans l'énoncé peut s'écrire ainsi : $\cos \theta \cos \alpha_4 - \sin \theta \sin \alpha_4 = \frac{C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}$

Soit $\cos(\theta + \alpha_4) = \frac{C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}$ d'où l'expression de $\alpha_4 = \cos^{-1} \left(\frac{C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}} \right) - \theta .$

Q32. Plus l'angle α_1 de la roue arrière augmente, plus l'angle α_4 de la roue avant s'éloigne de sa valeur idéale.

Donc le glissement augmente avec l'angle de rotation de la roue motrice.



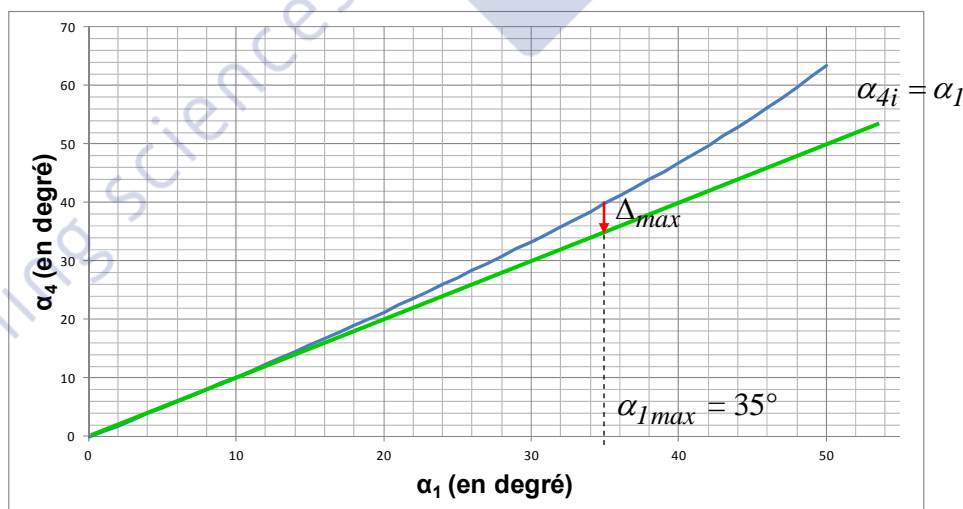
Q33. L'angle α_{1max} est égal à l'angle \widehat{APD} , donc $\sin(\alpha_{1max}) = \frac{a}{R_{min}}$

D'où : $\alpha_{1max} = \sin^{-1}\left(\frac{a}{R_{min}}\right)$.

Application numérique : $\alpha_{1max} = \sin^{-1}\left(\frac{521}{908}\right)$ donc $\alpha_{1max} = 35^\circ$.

Q34. Pour $\alpha_{1max} = 35^\circ$, on mesure un Δ_{max} de 5° .

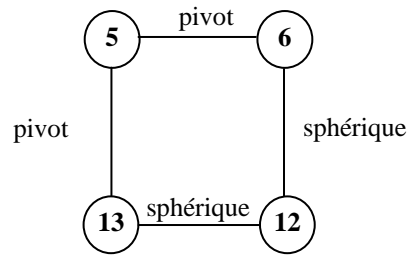
$\Delta_{\%max} = \frac{5^\circ}{35^\circ}$ donc $\Delta_{\%max} = 14,3\%$.



Q35. Le cahier des charges impose une erreur maximale relative de 15%, il est donc respecté.

Autre solution qui permettrait d'orienter la roue avant en fonction de l'orientation de sa roue arrière : un système avec deux poulies de diamètre identique solidaires respectivement de **6** et **13** reliées par une courroie croisée.

Q36. Graphe de liaisons du modèle de la chaîne des solides 5, 6, 12 et 13 :



Méthode cinématique :

Le degré d'hyperstatisme est

$$\text{donné par : } h_y = 6\gamma + (m_u + m_i) - I_c$$

$$h_y = 6.1 + (1+1) - 8 \text{ donc : } h_y = 0.$$

Méthode statique :

Le degré d'hyperstatisme est donné par : $h_y = N_s + (m_u + m_i) - 6(n-1)$

$$h_y = (5+5+3+3) + (1+1) - 6.(4-1) \text{ donc : } h_y = 0.$$

L'assemblage et le démontage du système d'orientation seront facilités car le modèle est isostatique.

Q37. La vitesse du moteur est de $\frac{2\pi}{60} 3750 = 392,7 \text{ rad/s}$, donc $K_M = \frac{392,7}{5} = 78,54 \text{ rad.s}^{-1}.V^{-1}$.

$$R(p) = \frac{\Omega_D(p)}{\Omega_M(p)} = \frac{1}{155,33}.$$

Q38. La vitesse angulaire $\Omega_D(t)$ est la dérivée de la position angulaire $\alpha_D(t)$ par rapport au temps.

$$\Omega_D(t) = \frac{d\alpha_D(t)}{dt} \Rightarrow D(p) = \frac{\alpha_D(p)}{\Omega_D(p)} = \frac{1}{p}.$$

Q39. Les angles de rotation $\alpha_D(t)$ et $\alpha_P(t)$ sont liés par la relation : $\alpha_P(t) = \frac{D_{pD}}{D_{pP}} \alpha_D(t) = 10\alpha_D(t)$.

$$\alpha_D = +/-75^\circ \Rightarrow \alpha_P = +/-750^\circ.$$

Le potentiomètre est alimenté sous 10V :

$$\alpha_P = 1800^\circ \Rightarrow V_r = 10 \text{ V}$$

$$\alpha_P = 0^\circ \Rightarrow V_r = 5 \text{ V}$$

$$\alpha_P = -1800^\circ \Rightarrow V_r = 0 \text{ V}$$

La relation liant la tension V_r à l'angle α_P (°) est : $V_r = 5 + \frac{\alpha_P}{360}$.

La plage de variation de la tension V_r correspondant à $\alpha_D = +/-75^\circ$ est $2,92 \text{ V} \leq V_r \leq 7,08 \text{ V}$.

$$\frac{dV_r}{d\alpha_D} = \frac{5}{180^\circ} \text{ V/}^\circ \Rightarrow \frac{dV_r}{d\alpha_D} = \frac{5}{\pi} = 1,59 \text{ V/rad} \Rightarrow \text{Cap}(p) = 1,59 \text{ V/rad}.$$

Q40. La fonction de transfert en boucle ouverte est donnée par :

$$T_{Bo}(p) = \frac{V_r(p)}{\varepsilon(p)} = \text{Cor}(p).H_M(p).R(p).D(p).\text{Cap}(p).$$

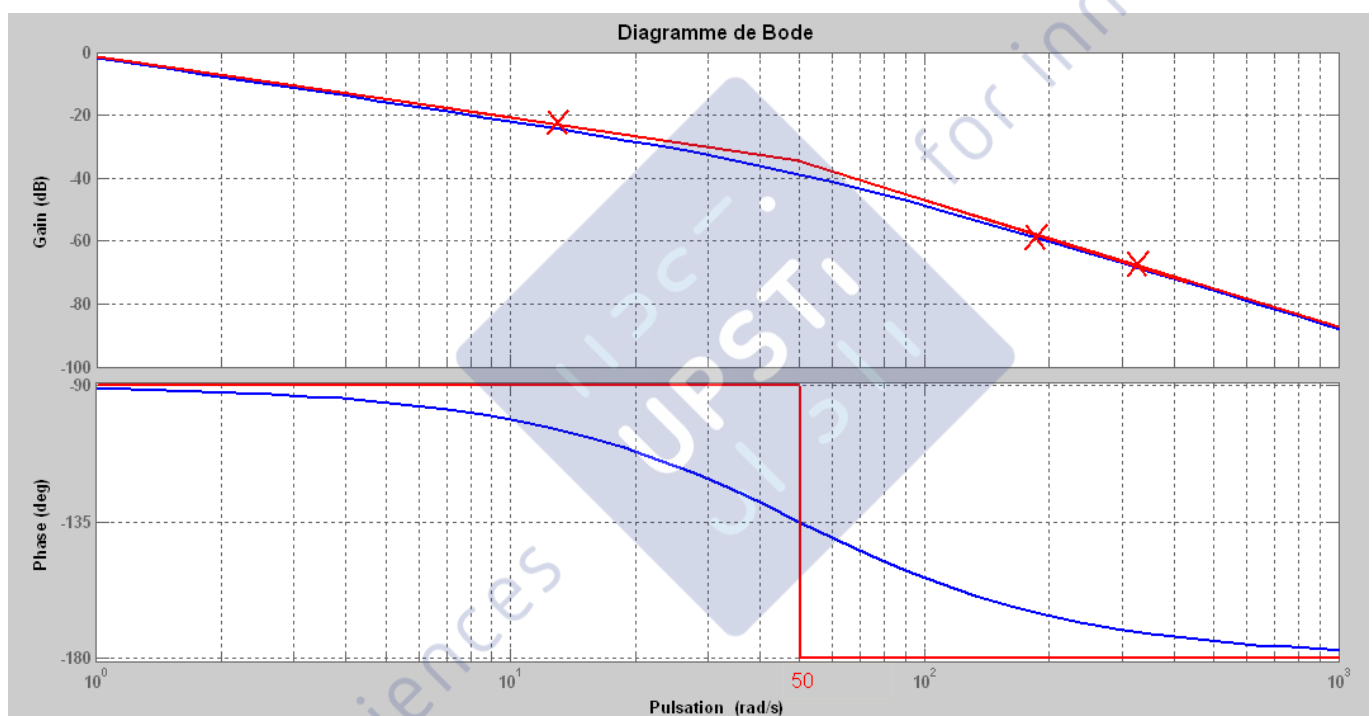
Q41. La fonction de transfert de l'ensemble variateur + moteur + charge mécanique est une fonction de transfert du second ordre avec deux pôles. La compensation du pôle dominant permet d'éliminer le pôle dominant qui correspond à la constante de temps la plus grande. On rend le système plus rapide.

$$T_{BO}(p) = \frac{V_r(p)}{\varepsilon(p)} = K_P \left(\frac{1+T_M p}{1+\frac{T_M}{a} p} \right) \frac{K_M}{(1+T_E p)(1+T_M p)} \cdot \frac{1}{155,33} \cdot \frac{1}{p} \cdot 1,59 = \frac{1,59 K_P}{p(1+T_E p)} \frac{1,59 K_M}{155,33} = \frac{K_P K_{BO}}{p(1+\tau_{BO} p)}$$

$$K_{BO} = \frac{1,59 K_M}{155,33} = 0,804 \quad \tau_{BO} = T_E = 20ms$$

On a supposé que $\frac{T_M}{a} \ll 1$ pour le domaine de fonctionnement.

Q42.



$$\text{Q43. } \omega_{M\varphi} = 50 \text{ rad/s} = \frac{1}{T_E}$$

$$\text{Q44. } |T_{BO}(j\omega_{M\varphi})| = \left| \frac{K_P K_{BO}}{j\omega_{M\varphi} (1+j\tau_{BO}\omega_{M\varphi})} \right| = \left| \frac{K_P K_{BO} T_E}{(1+j)} \right| = \frac{K_P K_{BO} T_E}{\sqrt{2}}$$

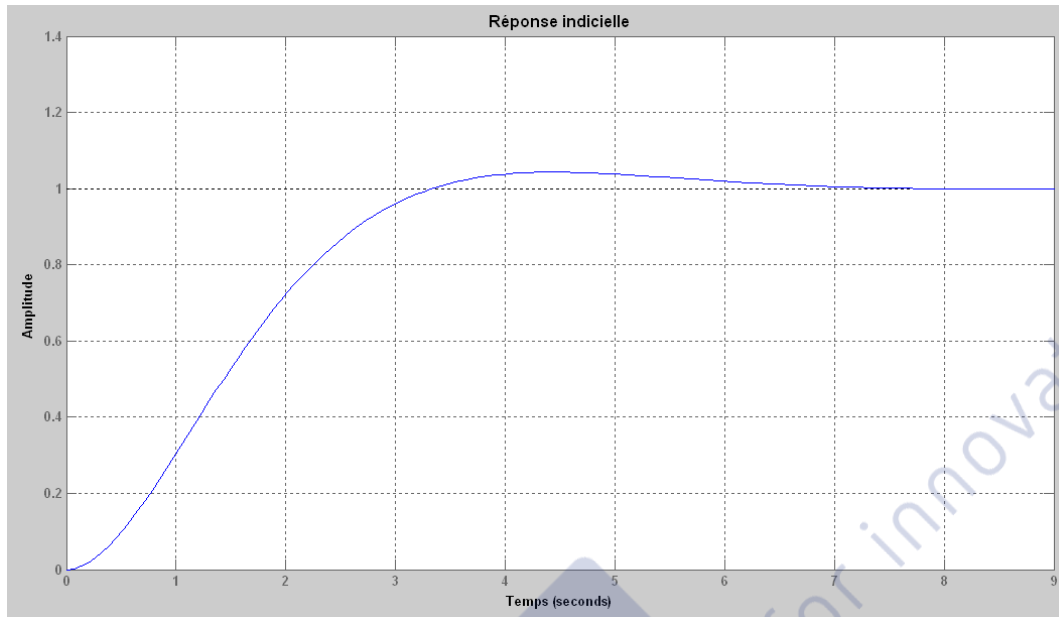
$$\text{AN : } |T_{BO}(j\omega_{M\varphi})| = 0,0115 \Rightarrow G = 20 \cdot \log |T_{BO}(j\omega_{M\varphi})| = -38,8 \text{ dB}$$

Quand K_P varie, le diagramme de la phase reste inchangé et le diagramme de gain se translate verticalement.

Pour la pulsation $\omega_{M\varphi}$ on veut obtenir un gain de 0 dB, il faut donc que $|T_{BO}(j\omega_{M\varphi})| = 1$.

$$\Rightarrow K_P = \frac{1}{|T_{BO}(j\omega_{M\varphi})|} = 86,8$$

Q45. Ce réglage permet d'avoir pour un système du second ordre un temps de réponse minimal, un faible dépassement 5%.



Q46. On a $\varepsilon(p) = V_a(p) - V_r(p)$ et $V_r(p) = \frac{T_{BO}(p)}{1+T_{BO}(p)} V_a(p)$.

$$\text{D'où } \varepsilon(p) = V_a(p) - \frac{T_{BO}(p)}{1+T_{BO}(p)} V_a(p) = \frac{1}{1+T_{BO}(p)} V_a(p) = \frac{p(1+\tau_{BO}p)}{(K_P K_{BO} + p + \tau_{BO}p^2)} V_a(p)$$

$$\frac{\varepsilon(p)}{V_a(p)} = \frac{p(1+\tau_{BO}p)}{(K_P K_{BO} + p + \tau_{BO}p^2)}$$

On met un échelon en entrée d'amplitude $V_a \Rightarrow V_a(p) = \frac{V_a}{p}$.

On applique le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(p)}{V_a(p)} = \frac{V_a p(1+\tau_{BO}p)}{(K_P K_{BO} + p + \tau_{BO}p^2)} = 0$$

Ce résultat était prévisible car on a un intégrateur dans la chaîne directe ($D(p)$) : système de classe 1.

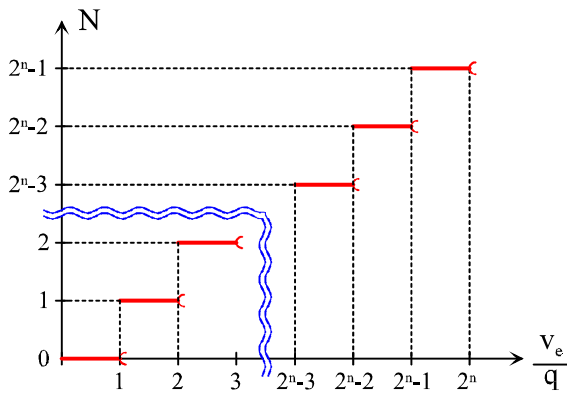
Q47. Il s'agit d'un convertisseur analogique numérique (CAN).

Q48. Si le convertisseur code les nombres en binaire pur sur 12 bits :

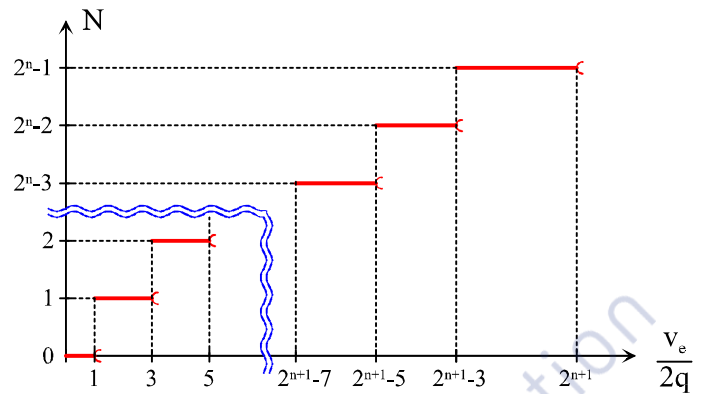
$$B_{min} = (0000\ 0000\ 0000)_2 \text{ tous les bits sont à } 0. \quad H_{min} = 0 \times 000$$

$$B_{max} = (1111\ 1111\ 1111)_2 \text{ tous les bits sont à } 1. \quad H_{max} = 0 \times FFF$$

Pour la valeur du nombre en sortie du convertisseur, cela dépend de la caractéristique utilisée.



Quantification linéaire



Quantification linéaire centrée

$$N_D = E \left[\frac{5}{10} 4096 \right] = 2048$$

$$B_D = (1000\ 0000\ 0000)_2 \Rightarrow H_D = 0 \times 800$$

$$N_D = E \left[\frac{(5-q)}{10} 4096 \right] = 2047$$

$$B_D = (011111111111)_2 \Rightarrow H_D = 0 \times 7FF$$

Q49. Le quantum du convertisseur est défini par : $q = \frac{V_{ref}}{2^n} = \frac{10}{2^{12}} = 2,44\ mV$

Q50. Rappel : la relation entre V_r (V) et α_p (rad) est $V_r = 5 + \frac{\alpha_p}{2\pi}$.

Pour obtenir une variation de V_r correspondant au quantum, α_p varie de $2\pi q$.

D'où $\varepsilon_{\alpha p} = 2\pi q = 15,3\ mrad$ et finalement $\varepsilon_{\alpha D} = \frac{2\pi q}{10} = 1,53\ mrad$ (rapport de 10 entre α_D et α_p).

Autre méthode : lorsque α_D varie de 2π , V_r varie de 10 V. Un incrément correspond à $\frac{2\pi}{2^{12}}$

D'où $\varepsilon_{\alpha D} = \frac{2\pi}{2^{12}} = 1,53\ mrad$



On fait l'hypothèse que $\varepsilon_{\alpha D}$ est suffisamment petit pour avoir $\tan(\varepsilon_{\alpha D}) = \varepsilon_{\alpha D}$.

D'où $\tan(\varepsilon_{\alpha D}) = \varepsilon_{\alpha D} = \Delta_y \Rightarrow \Delta_y = 1,53\ mm$

La précision latérale fixée par le cahier des charges est bien respectée.

Q51. A la vitesse maximale et au bout du temps T_e , la distance parcourue est $d = T_e \cdot V_{A,5/0} \max$.

Pour une distance parcourue de 1 m, $\Delta_y = 20\ mm$. Pour le temps T_e , $\Delta_y (mm) = \frac{T_e \cdot V_{A,5/0} \max}{1} \times 20$

Pour respecter une dérive latérale de 5 mm, il faut vérifier $20T_e \cdot V_{A,5/0} \max < 5$

$$\text{Soit } T_e < \frac{1}{4.V_{A,5/0}^{max}} = 0,2 \text{ s} .$$

Avec un coefficient de sécurité de 2, $T_e = 0,1 \text{ s}$.

Q52.

Cahier des charges relatif à la fonction FT1

Fonction	Critère	Niveau	
FT11 : Assurer l'avancement	Distance d'arrêt à partir de la vitesse maximale	0,2 m	validé
	Vitesse maximale	1,2 m·s ⁻¹	validé
	Dérapiage du VAG	Aucun	validé
	Basculement du chariot	Aucun	validé
	Accélération maximale assurant le non dérapage (valeur absolue)	3,6 m·s ⁻²	validé
	Charge utile de la table élévatrice	450 kg	non étudié
	Pente maximale franchissable	5%	non étudié
FT12 : Orienter le chariot suivant une trajectoire prédéterminée	Dérive latérale maximale en ligne droite	+/-5 mm/m	validé

Pour limiter la dérive latérale, il faut une valeur maximale de T_e de 0,2 s . En pratique la valeur de T_e est très inférieure.