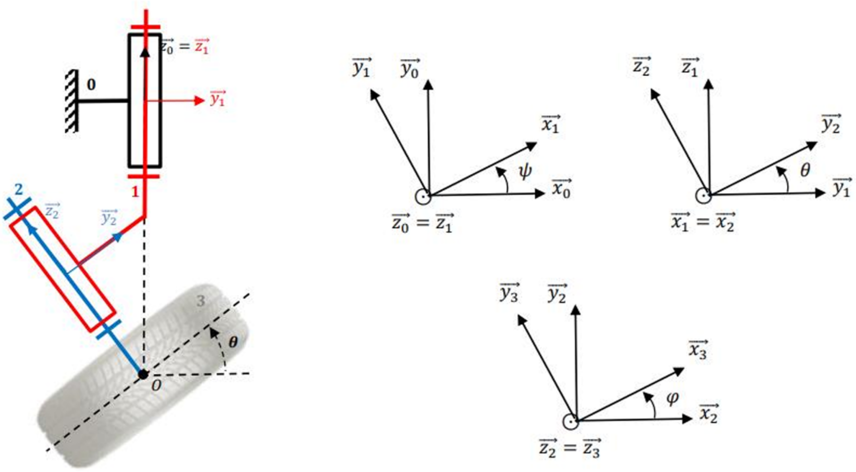
CI 9 – TD 4 - Effet gyroscopique

2026

1 Introduction

L'effet gyroscopique est le nom du phénomène de résistance a la modification d'un axe de rotation d'un solide. Sur un vélo par exemple, on tombe si on est à l'arrêt mais à l'équilibre si on est en mouvement. Ce phénomène peut être étudié analytiquement en appliquant le théorème du moment dynamique (équation des moment du PFD).

2 Étude d'un cas simplifié



Soit un pièce cylindrique 3 de révolution d'axe $(O, \overrightarrow{z_2})$ avec $\overrightarrow{z_2} = \overrightarrow{z_3}$. Ce solide est guidé par rapport au bâti 0 par l'intermédiaire de deux liaisons pivots en série dont les axes forment un angle θ constant.

Hypothèse

- Toutes les liaisons sont supposées parfaites.
- On néglige l'effet de la gravité sur les différents solides.
- On ne considère que la masse et l'inertie de la pièce 3.
- On néglige les masses et les inerties des autres solides.

Question 1 Donnez la forme de la matrice $\overline{\overline{I}}(O,3)$ du solide 3 au point O, et les hypothèses simplificatrices du problème.

La matrice $\overline{\overline{I}}(O,3)$ est de la forme :

$$\overline{\overline{I}}(O,3) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{R_2}$$

Car le solide 3 possède un axe de révolution autour de l'axe $(O, \overrightarrow{z_2})$

Question 2 Déterminer $\overrightarrow{\delta}_{O,3/0}$ puis $\overrightarrow{\delta}_{O,3/0}.\overrightarrow{x_1}$

Par définition :

$$\overrightarrow{\delta_{O,3/0}} = \frac{d\overrightarrow{\sigma_{O,3/0}}}{dt}$$

$$\overrightarrow{\sigma_{O,3/0}} = \overline{\overline{I}}(O,3).\overrightarrow{\Omega_{3/0}}$$

Par composition des vitesses de rotation:

$$\overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \overrightarrow{\Omega_{3/2}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$$

On obtient alors :

$$\overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \dot{\varphi}.\overrightarrow{z_2} + \overrightarrow{0} + \dot{\psi}.\overrightarrow{z_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\psi}.sin(\theta) \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}.cos(\theta) \end{pmatrix}_{R_2}$$

$$\overrightarrow{\sigma_{O,3/0}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{R_2} . \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\psi}.sin(\theta) \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}.cos(\theta) \end{pmatrix}_{R_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ A.\dot{\psi}.sin(\theta) \\ C.\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}.cos(\theta)\right) \end{pmatrix}_{R_2} = A.\dot{\psi}.sin(\theta).\overrightarrow{y_2} + C.\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}.cos(\theta)\right).\overrightarrow{z_2}$$

Et finalement:

$$\overrightarrow{\delta_{O,3/0}} = \left[\frac{d}{dt} A.\dot{\psi}.sin(\theta).\overrightarrow{y_2} + C.\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}.cos(\theta)\right).\overrightarrow{z_2}\right]_{R_0}$$

$$\left[\frac{d}{dt} A.\dot{\psi}.sin(\theta).\overrightarrow{y_2}\right]_{R_0} = \left[\frac{d}{dt} A.\dot{\psi}.sin(\theta).\overrightarrow{y_2}\right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge A.\dot{\psi}.sin(\theta).\overrightarrow{y_2} = A.\ddot{\psi}.sin(\theta).\overrightarrow{y_2} - A.\dot{\psi}^2.sin(\theta).cos(\theta).\overrightarrow{x_2}$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{d}{dt} C.\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}.cos(\theta)\right).\overrightarrow{z_2}\right]_{R_0} &= \left[\frac{d}{dt} C.\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}.cos(\theta)\right).\overrightarrow{z_2}\right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge C.\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}.cos(\theta)\right).\overrightarrow{z_2} \\ &= C.\left(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}.cos(\theta)\right).\overrightarrow{z_2} + C.\dot{\psi}.sin(\theta).\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}.cos(\theta)\right).\overrightarrow{x_2}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\delta_{O,3/0}} = A.\ddot{\psi}.sin(\theta).\overrightarrow{y_2} - A.\dot{\psi}^2.sin(\theta).cos(\theta).\overrightarrow{x_2} + C.\left(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}.cos(\theta)\right).\overrightarrow{z_2} + C.\dot{\psi}.sin(\theta).\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}.cos(\theta)\right).\overrightarrow{x_2}$$

Et :

$$\overrightarrow{\delta_{O,3/0}}.\overrightarrow{x_2} = -A.\dot{\psi}^2.sin(\theta).cos(\theta) + C.\dot{\psi}.sin(\theta).\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}.cos(\theta)\right) = \dot{\psi}^2.sin(\theta).cos(\theta).(C-A) + C.\dot{\psi}.\dot{\varphi}.sin(\theta)$$

Question 3 Donner la forme du torseur des efforts extérieurs sur le solide 3.

Les efforts extérieurs sur la roue viennent de la liaison pivot :

$$\{\mathcal{T}_{\overline{3}\rightarrow 3}\} = \underset{O}{\left\{\begin{array}{cc} X & L \\ Y & M \\ Z & \end{array}\right\}}_{R_2}$$

Le PFD appliqué sur le solide 3, l'équation de moment projeté sur $\overrightarrow{x_2}$ donne:

$$L = \dot{\psi}^2.sin(\theta).cos(\theta).(C-A) + C.\dot{\psi}.\dot{\varphi}.sin(\theta)$$

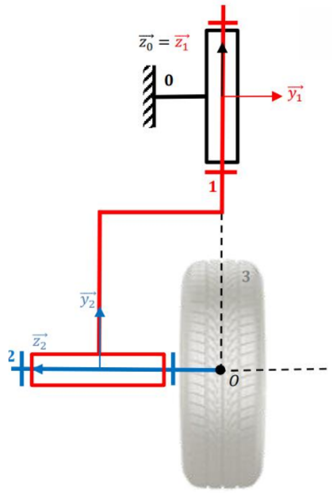
Question 4 En déduire le moment sur l'axe $(O, \overrightarrow{x_2})$ des efforts de 3 sur le solide 1. Ce moment est appelé couple gyrostatique.

$$\{\mathcal{T}_{3\rightarrow 1}\} = -\{\mathcal{T}_{\overline{3}\rightarrow 3}\} = \underset{O}{\left\{\begin{array}{cc} -X & -L \\ -Y & -M \\ -Z & \end{array}\right\}}_{R_2}$$

On en déduit le couple C_{gyro}:

$$C_{gyro} = -\dot{\psi}^2.sin(\theta).cos(\theta).(C-A) - C.\dot{\psi}.\dot{\varphi}.sin(\theta)$$

3 Application dans le cas d'une moto



On se place dans le cas où $\theta = \frac{\pi}{2}$ (on néglige la légère inclinaison de la fourche par rapport à la verticale). On suppose donc que le guidon est vertical suivant $\vec{z_1}$. On considère un déplacement de la moto de vitesse constante $\vec{V} = V.\vec{x_1}, V > 0$. Ainsi, le mouvement étant rectiligne et uniforme, les résultats que nous avons obtenu dans le référentiel lié à la pièce 0 (châssis de la moto) sont valables dans le référentiel terrestre.

Question 5 Simplifier C_{gyro} dans le cadre étudié.

$$C_{gyro} = -C.\dot{\psi}.\dot{\varphi}$$

Question 6 Préciser le signe de la vitesse de rotation de la roue $\dot{\varphi}$

Si $V > 0$ alors on $\dot{\varphi} < 0$

Question 7 Préciser le signe du couple gyrostatique C_{gyro} en fonction de $\dot{\psi}$

Comme $\dot{\varphi} < 0$ alors C_{gyro} est du même signe que $\dot{\psi}$

Question 8 Compléter le tableau suivant.

Rotation du guidon vers	la droite	la gauche
Signe de $\dot{\psi}$	-	+
Signe de C_{gyro}	-	+
La moto de s'incline selon $\vec{x_1}$ dans le sens	-	+
la moto s'incline vers la	gauche	droite