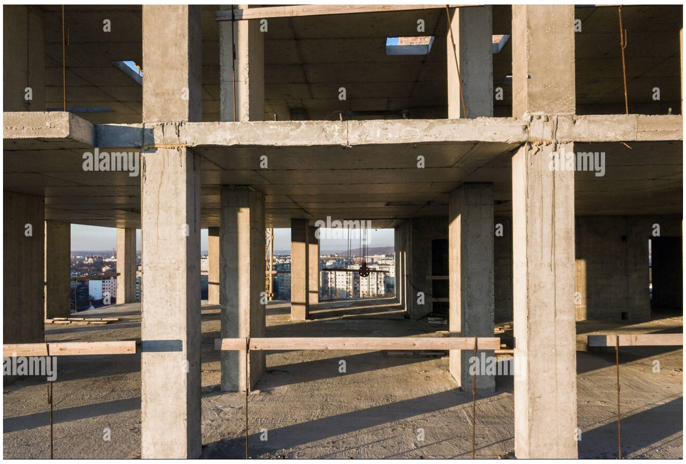
	CI 11 – TD 1 - Pillier de construction	2026

1 Mise en situation

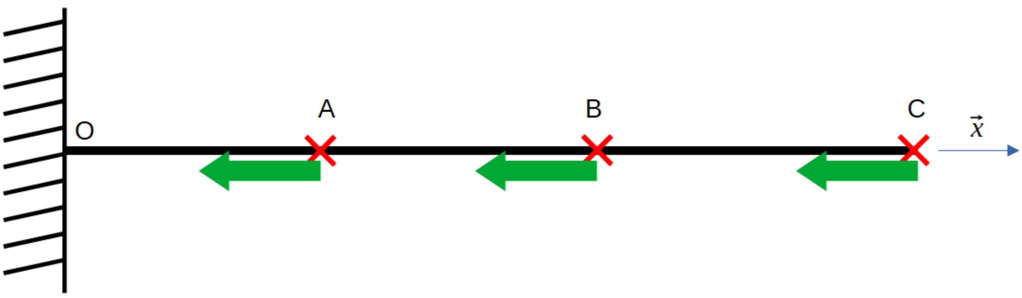
Dans la construction de bâtiment les piliers sont des supports permettant de porter le poids des structures supérieures. Il est nécessaire de dimensionner ces piliers pour éviter des accidents graves.



2 Positionnement du problème

On étudie un pilier d'un bâtiment de deux étages. Le pilier supporte 3 cloisons:

Une étude préalable permet de connaitre les efforts repris par le pilier, cela permet de poser le problème suivant:



Avec:

- $OA = h = 2.5m$
- $AB = h$
- $BC = h$
- $\{\mathcal{T}_{cloison1 \to pilier}\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} -F.\overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$
- $\{\mathcal{T}_{cloison2 \to pilier}\} = {}_B\left\{ \begin{array}{c} -F.\overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$
- $\{\mathcal{T}_{cloison3 \to pilier}\} = {}_C\left\{ \begin{array}{c} -F.\overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$
- $F = 1.10^5 N$ ce qui correspond à une structure de 3m*3m*0.5m de béton

On donne les caractéristiques de notre pilier:

- Le pilier est de section carré de coté $50cm$.
- Le pilier est en béton armé de module d'Young : $E = 35GPa$.
- Le béton utilisé à une résistance élastique de $R_e = 15MPa$.

Hypothèses :

- La modélisation poutre est utilisable (le pilier est assez élancé).
- Les hypothèses de Saint Venant et Bernoulli sont validés.
- On négligera le poids du pilier dans l'étude.
- On ne dépasse pas l'effort de flambage, le pilier est uniquement sollicité en compression.

Question 1 En isolant le pilier, déterminez les actions mécanique reprise par la liaison avec le sol.

On isole le pilier:
BAME:

- Action de la première cloison : $\{\mathcal{T}_{cloison1 \to pilier}\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} -F.\overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\} = {}_O\left\{ \begin{array}{c} -F.\overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$
- Action de la deuxième cloison : $\{\mathcal{T}_{cloison2 \to pilier}\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} -F.\overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\} = {}_O\left\{ \begin{array}{c} -F.\overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$
- Action de la troisième cloison : $\{\mathcal{T}_{cloison3 \to pilier}\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} -F.\overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\} = {}_O\left\{ \begin{array}{c} -F.\overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$
- Action de l'encastrement : $\{\mathcal{T}_{0 \to pilier}\} = {}_O\left\{ \begin{array}{c} X.\overrightarrow{x} + Y.\overrightarrow{y} + Z.\overrightarrow{z} \\ L.\overrightarrow{x} + M.\overrightarrow{y} + N.\overrightarrow{z} \end{array} \right\}$

Le PFS donne :

$$\{\mathcal{T}_{cloison1 \to pilier}\} + \{\mathcal{T}_{cloison2 \to pilier}\} + \{\mathcal{T}_{cloison3 \to pilier}\} + \{\mathcal{T}_{0 \to pilier}\} = \{0\}$$

On obtient :

$$\begin{cases} X = 3.F \\ Y = 0 \\ Z = 0 \\ L = 0 \\ M = 0 \\ N = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\{\mathcal{T}_{0 \to pilier}\} = {}_O\left\{ \begin{array}{c} 3.F.\overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$$

Question 2 Par la méthode des coupures, déterminez le torseur de cohésion en fonction de la distance x au point O (on fera bien attention à différencier les cas où la coupure est entre O et A, B et A, C et B).

On effectue une coupure au point K avec $\overrightarrow{OK} = x.\overrightarrow{x}$:

On a 3 cas, dans chacun des cas on isole la partie gauche (x petit) et on fait le PFS pour déterminer le torseur de cohésion :

- $x \in [0, h]$:
  On isole la partie de gauche du pilier:
  - Action de la liaison avec le sol : $\{\mathcal{T}_{0\rightarrow pilier}\} = {}_O\left\{ \begin{array}{c} 3.F.\overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\} = {}_K\left\{ \begin{array}{c} 3.F.\overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$
  - Action de la partie droite sur la partie gauche : $\{\mathcal{T}_{partie\ droite\rightarrow partie\ gauche}\} = \{\mathcal{T}_{cohesion\rightarrow}\}$

  Le PFS donne :
  $$\{\mathcal{T}_{cohesion\rightarrow}\} = {}_K\left\{ \begin{array}{c} -3.F.\overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$$

- $x \in [h, 2.h]$:
  On isole la partie de gauche du pilier:
  - Action de la liaison avec le sol : $\{\mathcal{T}_{0\rightarrow pilier}\} = {}_O\left\{ \begin{array}{c} 3.F.\overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\} = {}_K\left\{ \begin{array}{c} 3.F.\overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$
  - Action de la première cloison : $\{\mathcal{T}_{cloison1\rightarrow pilier}\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} -F.\overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\} = {}_K\left\{ \begin{array}{c} -F.\overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$
  - Action de la partie droite sur la partie gauche : $\{\mathcal{T}_{partie\ droite\rightarrow partie\ gauche}\} = \{\mathcal{T}_{cohesion\rightarrow}\}$

  Le PFS donne :
  $$\{\mathcal{T}_{cohesion\rightarrow}\} = {}_K\left\{ \begin{array}{c} -2.F.\overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$$

- $x \in [2.h, 3.h]$:
  On isole la partie de gauche du pilier:
  - Action de la liaison avec le sol : $\{\mathcal{T}_{0\rightarrow pilier}\} = {}_O\left\{ \begin{array}{c} 3.F.\overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\} = {}_K\left\{ \begin{array}{c} 3.F.\overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$
  - Action de la première cloison : $\{\mathcal{T}_{cloison1\rightarrow pilier}\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} -F.\overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\} = {}_K\left\{ \begin{array}{c} -F.\overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$
  - Action de la deuxième cloison : $\{\mathcal{T}_{cloison2\rightarrow pilier}\} = {}_B\left\{ \begin{array}{c} -F.\overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\} = {}_K\left\{ \begin{array}{c} -F.\overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$
  - Action de la partie droite sur la partie gauche : $\{\mathcal{T}_{partie\ droite\rightarrow partie\ gauche}\} = \{\mathcal{T}_{cohesion\rightarrow}\}$

  Le PFS donne :
  $$\{\mathcal{T}_{cohesion\rightarrow}\} = {}_K\left\{ \begin{array}{c} -.F.\overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$$

On obtient alors:
$$F_{traction}(x) = \begin{cases} -3.F & si \quad x \in [0, h] \\ -2.F & si \quad x \in [h, 2.h] \\ -F & si \quad x \in [2.h, 3.h] \end{cases}$$

Question 3 Déterminez le déplacement de la poutre. Déterminez ces déplacements en A,B et C.

La relation de comportement donne :
$$\frac{du}{dx} = \frac{F_{traction}}{S.E}$$

Ce qui donne dans les trois cas :

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{3.F}{S.E}.x + C_1 & si \quad x \in [0, h] \\ -\frac{2.F}{S.E}.x + C_2 & si \quad x \in [h, 2.h] \\ -\frac{F}{S.E}.x + C_3 & si \quad x \in [2.h, 3.h] \end{cases}$$

La liaison encastrement et la continuité du déplacement donne :

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{3.F}{S.E}.x & si \quad x \in [0, h] \\ -\frac{2.F}{S.E}.(x-h) - \frac{3.F}{S.E}.h & si \quad x \in [h, 2.h] \\ -\frac{F}{S.E}.(x-2.h) - \frac{5.F}{S.E}.h & si \quad x \in [2.h, 3.h] \end{cases}$$

On trouve alors :

$$\begin{cases} u(x=h) = -\frac{3.F}{S.E}.h = 8,6.10^{-5}m \\ u(x=2.h) = -\frac{5.F}{S.E}.h = 1,4.10^{-4}m \\ u(x=3.h) = -\frac{6.F}{S.E}.h = 1,7.10^{-4}m \end{cases}$$

Question 4 Déterminez la contrainte maximale dans la poutre. Vérifiez le dimensionnement choisit.

Dans la section $x \in [0, h]$, l'effort de compression est maximal:

$$F_{traction} = -3.F \Rightarrow \sigma = \frac{F_{traction}}{S} = 1.2MPa$$

La résistance élastique est de $15MPa$, le pilier va tenir.

Question 5 Lors d'une visite de contrôle, où doit on contrôler en priorité pour vérifier la tenue de la structure?

On regarde le bas du pilier car c'est le plus sollicité.