



## 1 Présentation du problème

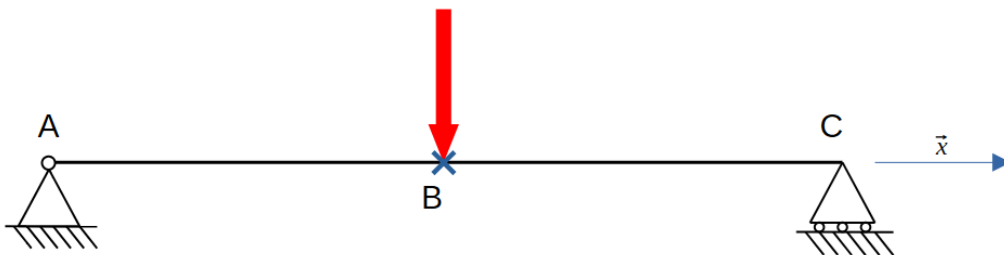
Une barre de traction est un dispositif de sport à domicile, l'utilisateur porte le poids de son corps et le hisse à l'aide de la force de ses bras.



On s'intéresse au dimensionnement de la barre portant le poids. L'objectif est de supporter un homme de 150kg sans que la barre ne se déforme plastiquement.

## 2 Modélisation du problème

On modélise le système par le modèle poutre suivant:



### Données :

- La poutre est de longueur  $L$ . Le point  $B$  est au centre de cette poutre.
- On connaît le chargement :

$$\{\mathcal{T}_{\text{chargement} \rightarrow \text{poutre}}\} = \begin{Bmatrix} -F \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

- La section de la poutre est un disque de rayon  $R$

et de moment quadratique :  $I_z = \frac{\pi \cdot R^4}{4}$

- La barre centrale est un solide homogène uniforme et isotrope.
- La barre est en alliage d'aluminium de module d'Young  $E = 70 \text{ GPa}$  et de résistance élastique  $R_e = 90 \text{ MPa}$ .
- L'accélération de la gravité est  $\vec{g} = -g \cdot \vec{y}$  avec  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

**Question 1** En isolant la poutre, déterminer les efforts repris par chacune des liaisons. **On isole la poutre:**  
BAME:

- Action en A :  $\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow p, A}\} = \begin{Bmatrix} X_A \cdot \vec{x} + Y_A \cdot \vec{y} + Z_A \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$
- Action en C :  $\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow p, C}\} = \begin{Bmatrix} Y_C \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_C \cdot \vec{y} \\ Y_C \cdot L \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}$
- Chargement en B :  $\{\mathcal{T}_{C \rightarrow p}\} = \begin{Bmatrix} -F \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F \cdot \vec{y} \\ -F \cdot \frac{L}{2} \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}$

Le PFS donne :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow p, A}\} + \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow p, C}\} + \{\mathcal{T}_{C \rightarrow p}\} = \{0\}$$

On obtient le système suivant:

$$\begin{cases} X_A & = & 0 \\ Y_A + Y_C & = & F \\ Z_A & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ Y_C \cdot L & = & F \cdot \frac{L}{2} \end{cases}$$

On obtient alors les actions extérieures:

- Action en A :  $\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow p, A}\} = \begin{Bmatrix} \frac{F}{2} \cdot \vec{y} \\ 0 \end{Bmatrix}$
- Action en C :  $\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow p, C}\} = \begin{Bmatrix} \frac{F}{2} \cdot \vec{y} \\ 0 \end{Bmatrix}$
- Chargement en B :  $\{\mathcal{T}_{C \rightarrow p}\} = \begin{Bmatrix} -F \cdot \vec{y} \\ 0 \end{Bmatrix}$

**Question 2** Par la méthodes des coupures, déterminer le torseur de cohésion le long de la poutre en fonction de  $x$  la distance entre A et K le point de coupe. On effectue une coupure en  $K$  tel que  $\vec{AK} = x \cdot \vec{x}$

On sépare en deux cas :

- Cas  $x \in [0, \frac{L}{2}]$  On isole la partie gauche de la poutre: BAME:

$$\text{Action en A : } \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow p, A}\} = \begin{Bmatrix} \frac{F}{2} \cdot \vec{y} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{F}{2} \cdot \vec{y} \\ -\frac{F}{2} \cdot x \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}$$

Action de la partie droite sur la partie gauche :  $\{\mathcal{T}_{cohesion \rightarrow poutre}\}$  Le PFS donne :

$$\{\mathcal{T}_{cohesion \rightarrow poutre}\} = -\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow p, A}\} = \begin{Bmatrix} -\frac{F}{2} \cdot \vec{y} \\ \frac{F}{2} \cdot x \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}$$

- Cas  $x \in [\frac{L}{2}, L]$  On isole la partie droite de la poutre: BAME:

$$\text{Action en C : } \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow p, C}\} = \begin{Bmatrix} \frac{F}{2} \cdot \vec{y} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{F}{2} \cdot \vec{y} \\ \frac{F}{2} \cdot (L - x) \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}$$

Action de la partie gauche sur la partie droite :  $-\{\mathcal{T}_{cohesion \rightarrow poutre}\}$  Le PFS donne :

$$\{\mathcal{T}_{cohesion \rightarrow poutre}\} = \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow p, C}\} = \begin{Bmatrix} \frac{F}{2} \cdot \vec{y} \\ \frac{F}{2} \cdot (L - x) \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}$$

On trouve alors le moment de flexion sur  $\vec{z}$ :

$$M_{flexion} = \begin{cases} \frac{F}{2} \cdot x & x \in [0, \frac{L}{2}] \\ \frac{F}{2} \cdot (L - x) & x \in [\frac{L}{2}, L] \end{cases}$$

**Question 3** Déterminer le déplacement de la poutre en fonction de  $x$ .

L'équation de liaison entre effort et déformation donne :

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M_{flexion}}{E \cdot I_z}$$

Avec les conditions de déplacements :

$$\begin{cases} v(x=0) = 0 & \text{Liaison} \\ v(x=L) & \text{Liaison} \\ v(x = \frac{L}{2}^+) = v(x = \frac{L}{2}^-) & \text{Condition de continuité} \\ \frac{dv}{dx}(x = \frac{L}{2}^+) = \frac{dv}{dx}(x = \frac{L}{2}^-) & \text{Condition de continuité} \end{cases}$$

La déformation devient alors:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \begin{cases} \frac{F}{2.E.I_z} \cdot x & x \in [0, \frac{L}{2}] \\ \frac{F}{2.E.I_z} \cdot (L - x) & x \in [\frac{L}{2}, L] \end{cases}$$

En intégrant deux fois on obtient :

$$\frac{dv}{dx} = \begin{cases} \frac{F}{2.E.I_z} \cdot \left( \frac{x^2}{2} + C_1 \right) & x \in [0, \frac{L}{2}] \\ \frac{F}{2.E.I_z} \cdot \left( L \cdot x - \frac{x^2}{2} + C_3 \right) & x \in [\frac{L}{2}, L] \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} \frac{F}{2.E.I_z} \cdot \left( \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2 \right) & x \in [0, \frac{L}{2}] \\ \frac{F}{2.E.I_z} \cdot \left( \frac{L \cdot x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + C_3 \cdot x + C_4 \right) & x \in [\frac{L}{2}, L] \end{cases}$$

Pour déterminer les constantes d'intégration, on utilise les conditions aux limites et de continuité:

$$\left\{ \begin{array}{l} v(x=0) = 0 \\ v(x=L) \\ v(x = \frac{L}{2}^+) = v(x = \frac{L}{2}^-) \\ \frac{dv}{dx}(x = \frac{L}{2}^+) = \frac{dv}{dx}(x = \frac{L}{2}^-) \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Liaison} \\ \text{Liaison} \\ \text{Condition de continuité} \\ \text{Condition de continuité} \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_2 = 0 \\ \frac{F}{2.E.I_z} \cdot \left( \frac{L^3}{3} + C_3 \cdot L + C_4 \right) = 0 \\ \frac{F}{2.E.I_z} \cdot \left( \frac{L^3}{48} + C_1 \cdot \frac{L}{2} + C_2 \right) = \frac{F}{2.E.I_z} \cdot \left( \frac{L^3}{8} - \frac{L^3}{48} + C_3 \cdot \frac{L}{2} + C_4 \right) \\ \frac{F}{2.E.I_z} \cdot \left( \frac{L^2}{8} + C_1 \right) = \frac{F}{2.E.I_z} \cdot \left( \frac{3 \cdot L^2}{8} + C_3 \right) \end{array} \right.$$

On obtient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_2 = 0 \\ \frac{L^3}{3} + C_3 \cdot L + C_4 = 0 \\ \frac{L^3}{48} + C_1 \cdot \frac{L}{2} = \frac{L^3}{24} + C_3 \cdot \frac{L}{2} + C_4 \\ \frac{L^2}{8} + C_1 = \frac{3 \cdot L^2}{8} + C_3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_2 = 0 \\ C_3 \cdot L + C_4 = -\frac{L^3}{3} \\ C_1 \cdot \frac{L}{2} - C_3 \cdot \frac{L}{2} - C_4 = \frac{L^3}{12} \\ C_1 - C_3 = \frac{L^2}{4} \end{array} \right.$$

En additionnant les lignes 2 et 3 on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_2 = 0 \\ C_3 \cdot L + C_4 = -\frac{L^3}{3} \\ C_1 \cdot \frac{L}{2} + C_3 \cdot \frac{L}{2} = -\frac{L^3}{4} \Rightarrow C_1 + C_3 = -\frac{L^2}{2} \\ C_1 - C_3 = \frac{L^2}{4} \end{array} \right.$$

En additionnant la deuxième ligne et la troisième on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_2 = 0 \\ C_3 \cdot L + C_4 = -\frac{L^3}{3} \\ C_1 + C_3 = -\frac{L^2}{2} \\ 2 \cdot C_1 = -\frac{L^2}{4} \Rightarrow C_1 = -\frac{L^2}{8} \end{array} \right.$$

La deuxième ligne donne alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_2 = 0 \\ C_3 \cdot L + C_4 = -\frac{L^3}{3} \\ C_3 = -\frac{3 \cdot L^2}{8} \\ C_1 = -\frac{L^2}{8} \end{array} \right.$$

Et finalement :

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_4 = \frac{L^3}{24} \\ C_3 = -\frac{3.L^2}{8} \\ C_1 = -\frac{L^2}{8} \end{cases}$$

On obtient alors :

$$v(x) = \begin{cases} \frac{F}{2.E.I_z} \cdot \left( \frac{x^3}{6} - \frac{L^2}{8} \cdot x \right) & x \in [0, \frac{L}{2}] \\ \frac{F}{2.E.I_z} \cdot \left( \frac{L.x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{3.L^2}{8} \cdot x + \frac{L^3}{24} \right) & x \in [\frac{L}{2}, L] \end{cases}$$

Une autre méthode possible pour trouver ces résultats est de travailler avec la symétrie du problème par rapport à  $x = \frac{L}{2}$  le système d'équation devient:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \begin{cases} \frac{F}{2.E.I_z} \cdot x & x \in [0, \frac{L}{2}] \\ v(x) & = v(L-x) \end{cases}$$

Avec la condition de continuité:

$$\frac{dv}{dx}(x = \frac{L}{2}^+) = \frac{dv}{dx}(x = \frac{L}{2}^-) = 0$$

Et la condition au limite :

$$v(x=0) = 0$$

On obtient alors :

$$\frac{dv}{dx} = \begin{cases} \frac{F}{2.E.I_z} \cdot \left( \frac{x^2}{2} + C_1 \right) & x \in [0, \frac{L}{2}] \\ \frac{F}{2.E.I_z} \cdot \left( \frac{(L-x)^2}{2} + C_1 \right) & x \in [\frac{L}{2}, L] \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} \frac{F}{2.E.I_z} \cdot \left( \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2 \right) & x \in [0, \frac{L}{2}] \\ \frac{F}{2.E.I_z} \cdot \left( \frac{(L-x)^3}{6} + C_1 \cdot (L-x) + C_2 \right) & x \in [\frac{L}{2}, L] \end{cases}$$

La détermination des constantes donne le système :

$$\begin{cases} \frac{F}{2.E.I_z} \cdot \left( \frac{L^2}{8} + C_1 \right) = 0 \\ \frac{F}{2.E.I_z} \cdot (C_2) = 0 \end{cases}$$

On obtient rapidement :

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{L^2}{8} \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

D'où

$$v(x) = \begin{cases} \frac{F}{2.E.I_z} \cdot \left( \frac{x^3}{6} - \frac{L^2}{8} \cdot x \right) & x \in [0, \frac{L}{2}] \\ \frac{F}{2.E.I_z} \cdot \left( \frac{(L-x)^3}{6} - \frac{L^2}{8} \cdot (L-x) \right) & x \in [\frac{L}{2}, L] \end{cases}$$

En développant la deuxième partie de la solution on trouve :

$$v(x) = \begin{cases} \frac{F}{2.E.I_z} \cdot \left( \frac{x^3}{6} - \frac{L^2}{8} \cdot x \right) & x \in [0, \frac{L}{2}] \\ \frac{F}{2.E.I_z} \cdot \left( \frac{L^3 - 3.L^2 \cdot x + 3.L \cdot x^2 - x^3}{6} - \frac{L^3 - L^2 \cdot x}{8} \right) & x \in [\frac{L}{2}, L] \end{cases}$$

Et finalement:

$$v(x) = \begin{cases} \frac{F}{2.E.I_z} \cdot \left( \frac{x^3}{6} - \frac{L^2}{8} \cdot x \right) & x \in [0, \frac{L}{2}] \\ \frac{F}{2.E.I_z} \cdot \left( \frac{L^3}{24} - \frac{3.L^2}{8} \cdot x + \frac{L}{2} \cdot x^2 - \frac{x^3}{6} \right) & x \in [\frac{L}{2}, L] \end{cases}$$

On retrouve la même solution que précédemment.

**Question 4** Déterminer l'emplacement le plus sollicité et la contrainte maximale dans la poutre.

La contrainte est calculable par la formule:

$$\sigma = \frac{M_{flexion}}{I_z} \cdot y$$

Pour trouver la contrainte maximale on doit trouver le moment maximal et  $y$  maximal. Le moment est maximal en  $x = \frac{L}{2}$  et faut  $M_{flexion} = \frac{F.L}{4}$ .  $y$  est maximal lorsqu'on se place sur l'extérieur du cercle:  $y = R$

On trouve alors:

$$\sigma_{max} = \frac{F.L.R}{4.I_z} = \frac{F.L.R}{\pi.R^4} = \frac{F.L}{\pi.R^3}$$

**Question 5** Déterminer le rayon minimum pour porter une charge de 150kg sans dépasser la résistance élastique. Que devient ce rayon si on prends un coefficient de sécurité de 1.2 (la barre doit alors supporter une charge de 180kg).

La charge  $F$  est un poids :

$$F = m.g$$

On trouve donc:

$$R = \sqrt[3]{\frac{m.g.L}{\pi.R_e}}$$

On trouve donc pour une masse de 150kg et une longueur  $L = 1m$ :

$$R = 1.73cm$$

Et pour une masse de 180kg :

$$R = 1.84cm$$