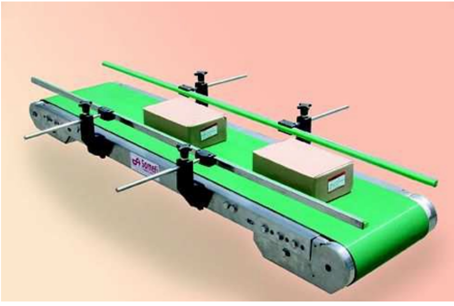
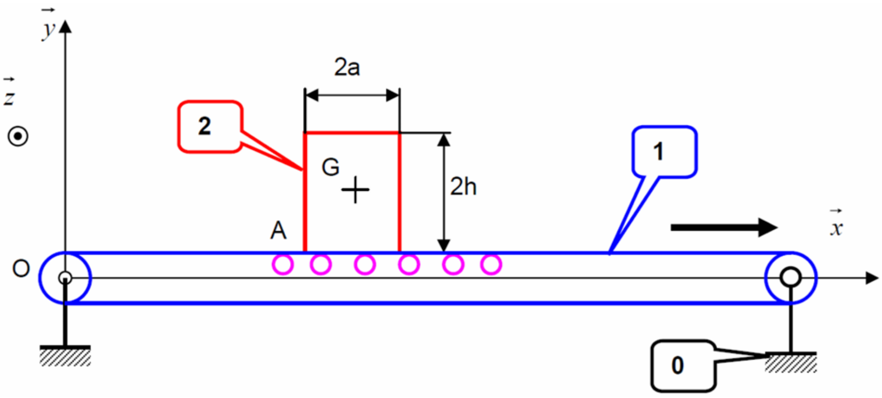
1 Mise en situation

Le carton de forme parallélépipédique est un moyen classique de conditionnement des produits. De nombreuses sociétés reçoivent, en provenance de leurs fournisseurs, des produits conditionnés de cette manière. Dans le processus permettant d'assurer automatiquement la découpe des cartons d'emballage pour en extraire les produits contenus, l'étude concerne la stabilité des cartons lors de la mise en mouvement du convoyeur.



L'étude est schématisé par un problème plan, dans le plan $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ du référentiel galiléen $R(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ lié au bâti **0** du convoyeur. On désigne par $\overrightarrow{g} = -g.\overrightarrow{y}$ le vecteur accélération de la pesanteur.
Pendant la phase de mouvement étudiée, la partie supérieure du tapis **1** du convoyeur, en contact avec une face du carton **2**, est animé d'un mouvement de translation rectiligne uniformément accéléré, de vecteur accélération $\gamma_0.\overrightarrow{x}$ ($\gamma_0 > 0$).
Dans le plan de figure, le carton **2** est assimilé à un rectangle homogène, de masse m et de centre d'inertie G, de hauteur $2h$ et de largeur $2a$.
On note f le coefficient de frottement entre le carton et le tapis du convoyeur.



2 Données numériques

- $h = 350mm$
- $a = 75mm$
- $f = 0.2$
- $g = 9.81m/s^2$

3 Travail à réaliser

Question 1 Déterminer l'expression de la résultante dynamique du carton par rapport au sol.

Question 2 Déterminer l'expression du moment dynamique en A du carton par rapport au sol.

Par définition :

$$\{\mathcal{D}_{2/0}\} = {}_G\left\{ \begin{array}{c} \frac{d\ m.\overrightarrow{V_{G\in 2/0}}}{dt} \\ \overrightarrow{\delta_{G\in 2/0}} \end{array} \right\}$$

avec :

- $\frac{d\ m.\overrightarrow{V_{G\in 2/0}}}{dt} = m.\gamma_0.\overrightarrow{x}$
- $\overrightarrow{\sigma_{G\in 2/0}} = \overline{\overline{I}}(G,3).\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{\delta_{G\in 2/0}} = \frac{d\ \overrightarrow{\sigma_{G\in 2/0}}}{dt} = \overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{\delta_{A\in 2/0}} = \overrightarrow{\delta_{G\in 2/0}} + \overrightarrow{AG} \wedge m.\gamma_0.\overrightarrow{x} = -h.m.\gamma_0.\overrightarrow{z}$

On trouve alors :

$$\{\mathcal{D}_{2/0}\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \\ -h.m.\gamma_0.\overrightarrow{z} \end{array} \right\}$$

Question 3 Justifier qu'il y a non basculement tant que $M > 0$ avec $\overrightarrow{M_{A,1\to 2}} = M.\overrightarrow{z}$

Les efforts du contact entre le carton et le convoyeur sont dirigés du convoyeur vers le carton ($\overrightarrow{y}$ vers le haut), chacun des efforts locaux créé un moment en A dirigé vers + $\overrightarrow{z}$ donc avec le contact on a $M > 0$. Par contra posé, $M < 0$ implique une rupture du contact

Question 4 En utilisant le Principe fondamental de la dynamique, écrire les équations utiles.

On isole le carton **2** :

BAME :

- Action de la pesanteur sur le carton : $\{\mathcal{T}_{pes\to carton}\} = {}_G\left\{ \begin{array}{c} -m.g.\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} -m.g.\overrightarrow{y} \\ -m.g.a.\overrightarrow{z} \end{array} \right\}$
- Action de 1 vers 2 (nominale): $\{\mathcal{T}_{1\to carton}\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} R.\overrightarrow{y} \\ M.\overrightarrow{z} \end{array} \right\}$ Avec la modélisation plane (qui supprime la composante sur $\overrightarrow{x}$ du moment). Cependant ce contact est frottant :
- Action de 1 vers 2 (En prenant en compte le contact frottant): $\{\mathcal{T}_{1\to carton}\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} T.\overrightarrow{x} + R.\overrightarrow{y} \\ M.\overrightarrow{z} \end{array} \right\}$ avec la condition d'adhérence : $\frac{|T|}{|R|} \leq f$

On applique alors le PFD sur 2 dans son mouvement dans le référentiel galiléen 0:

$$\{\mathcal{T}_{pes\to carton}\} + \{\mathcal{T}_{1\to carton}\} = \{\mathcal{D}_{2/0}\}$$

On obtient les équations vectorielles suivants:

$$\begin{cases} -m.g.\overrightarrow{y} + T.\overrightarrow{x} + R.\overrightarrow{y} & = & m.\gamma_0.\overrightarrow{x} \\ -m.g.a.\overrightarrow{z} + M.\overrightarrow{z} & = & -h.m.\gamma_0.\overrightarrow{z} \end{cases}$$

Ce qui donne les équations scalaires utiles suivantes :

$$\begin{cases} T & = & m.\gamma_0 \\ -m.g + R & = & 0 \\ -m.g.a + M & = & -h.m.\gamma_0 \end{cases}$$

Question 5 Déterminer les valeurs d'accélération limites évitant le basculement et le glissement. Étudier quel mode de défaillance arrivera en premier.

La résolution des équations donne:

$$\begin{cases} T & = & m.\gamma_0 \\ R & = & m.g \\ M & = & m.g.a - h.m.\gamma_0 \end{cases}$$

la condition de non basculement donne:

$$M < 0 \Leftrightarrow m.g.a - h.m.\gamma_0 < 0 \Leftrightarrow \gamma_0 < g.\frac{a}{h} = 2,10 m.s^{-2}$$

la condition d'adhérence donne :

$$\frac{|T|}{|R|} \leq f \Leftrightarrow \frac{m.\gamma_0}{m.g} < f \Leftrightarrow \gamma_0 < f.g = 1,96 m.s^{-2}$$

L'accélération limite est de $\gamma_0 = 1,96 m.s^{-2}$