1 Mise en situation

La figure ci dessous représente la chaîne cinématique d'une transmission de treuil:

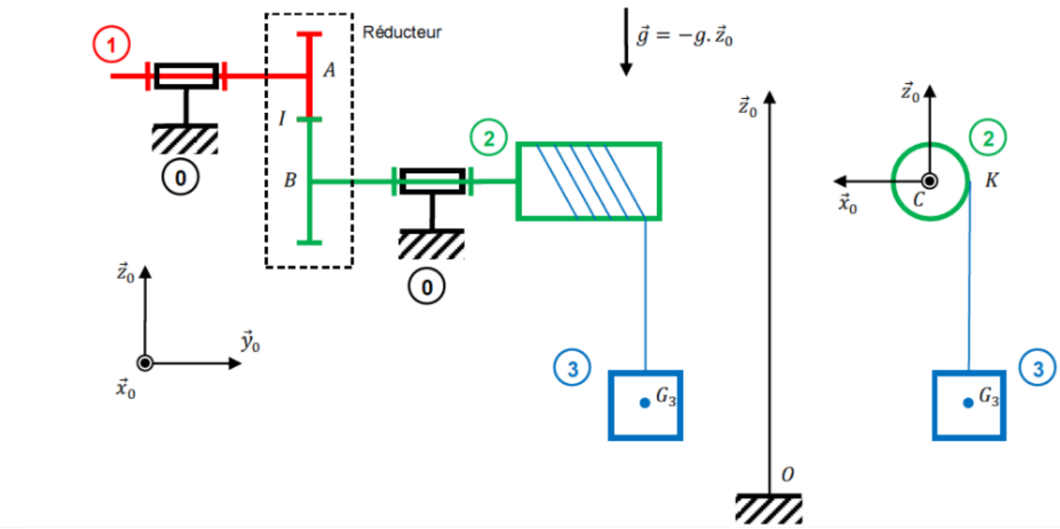

Figure 1: Schéma cinématique du treuil.

- On note $R_0(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ le repère galiléen lié au bâti **0**.
- L'arbre moteur **1** est en liaison pivot d'axe $(A, \overrightarrow{y_0})$ avec le bâti **0**.
- La position angulaire de **1** par rapport à **0** est notée: $\theta_{1/0}$
- L'arbre moteur **2** est en liaison pivot d'axe $(B, \overrightarrow{y_0})$ avec le bâti **0**.
- La position angulaire de **2** par rapport à **0** est notée: $\theta_{2/0}$
- Le pignon moteur **1** de rayon primitif r_1 roule sans glisser en I sur le pignon tambour **2** de rayon primitif r_2.
- Le réducteur est caractérisé par son rapport de réduction : $k = \frac{\dot{\theta}_{2/0}}{\dot{\theta}_{1/0}} = -\frac{|r_1|}{|r_2|}$ avec $|k| < 1$
- La charge **3** est suspendue à un câble considéré inextensible et sans masse.
- le câble s'enroule sans glisser sur l'arbre tambour en K avec $\overrightarrow{CK} = -R_T.\overrightarrow{x_0}$ avec $R_T > 0$
- L'action mécanique du stator lié à **0** sur le rotor lié **1** est modélisée en A par le torseur couple :

$$\{\mathcal{T}_{CEM:0\to 1}\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m(t).\overrightarrow{y_0} \end{array} \right\}}$$

Les caractéristique de masse de **1** sont :

- Masse : m_1
- Centre d'inertie G_1 avec $\overrightarrow{AG_1} = -L_1.\overrightarrow{y_0}$
- Moment d'inertie par rapport à l'axe $(A, \overrightarrow{y_0})$: I_1

Les caractéristique de masse de **2** sont :

- Masse : m_2
- Centre d'inertie G_2 avec $\overrightarrow{BG_2} = L_2.\overrightarrow{y_0}$
- Moment d'inertie par rapport à l'axe $(B, \overrightarrow{y_0})$: I_2

Les caractéristique de masse de **3** sont :

- Masse : m_3
- Centre d'inertie G_3 avec $\overrightarrow{OG_3} = a.\overrightarrow{y_0} + z_{3/0}.\overrightarrow{z_0}$

L'accélération de la gravité est notée : $\overrightarrow{g} = -g.\overrightarrow{z_0}$ Les liaisons sont considérées comme parfaites.

2 Questions

Question 1 Réaliser le graphe de structure du système.

Question 2 Traduire le roulement sans glissement du pignon en K du câble sur le tambour **2** pour obtenir une relation liant $\dot{z_{3/0}}, R_T, k$ et $\dot{\theta}_{1/0}$.

On a :

- $\{\mathcal{V}_{2/0}\} = {}_B\left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_{2/0}.\overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$
- $\{\mathcal{V}_{3/0}\} = {}_{G_3}\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \dot{z}_3.\overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}$
- $k = \frac{\dot{\theta}_{2/0}}{\dot{\theta}_{1/0}}$

La condition de roulement sans glissement en K s'écrit:

$$\overrightarrow{V_{k\in 3/2}} = \overrightarrow{0}$$

D'où :

$$\overrightarrow{V_{k\in 3/2}} = \overrightarrow{V_{k\in 3/0}} + \overrightarrow{V_{k\in 0/2}} = \overrightarrow{0}$$
$$\overrightarrow{V_{k\in 3/2}} = \overrightarrow{V_{k\in 3/0}} - \overrightarrow{V_{k\in 2/0}} = \overrightarrow{0}$$

Calculons les vitesses:

- Calcul de $\overrightarrow{V_{K\in 3/0}}$:

$$\overrightarrow{V_{K\in 3/0}} = \overrightarrow{V_{G_3\in 3/0}} + \overrightarrow{KG_3} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/0}}$$
$$\overrightarrow{V_{K\in 3/0}} = \dot{z}_3.\overrightarrow{z_0} + \overrightarrow{KG_3} \wedge \overrightarrow{0} = \dot{z}_3.\overrightarrow{z_0}$$

- Calcul de $\overrightarrow{V_{k\in 2/0}}$:

$$\overrightarrow{V_{K\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{B\in 3/0}} + \overrightarrow{KB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}}$$
$$\overrightarrow{V_{K\in 2/0}} = \overrightarrow{0} + (-L.\overrightarrow{y_0} + R_T.\overrightarrow{x_0}) \wedge \dot{\theta}_{2/0}.\overrightarrow{y_0} = R_T.\dot{\theta}_{2/0}.\overrightarrow{z_0}$$

On obtient alors:

$$\overrightarrow{V_{k\in 3/2}} = \overrightarrow{V_{k\in 3/0}} - \overrightarrow{V_{k\in 2/0}} = \overrightarrow{0}$$
$$\overrightarrow{V_{k\in 3/2}} = \dot{z}_3.\overrightarrow{z_0} - R_T.\dot{\theta}_{2/0}.\overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{0}$$

En projetant sur $\overrightarrow{z_0}$:

$$\dot{z}_3 = R_T.\dot{\theta}_{2/0}$$

En divisant par $\dot{\theta}_{1/0}$ et en identifiant k:

$$\frac{\dot{z}_3}{\dot{\theta}_{1/0}} = R_T.k$$

Question 3 Déterminer les énergies cinétiques des solides en mouvements par rapport au bâti **0**.

- Solide 1 : $E_{c,1/0} = \frac{1}{2}.I_1.(\dot{\theta}_{1/0})^2$
- Solide 2 : $E_{c,2/0} = \frac{1}{2}.I_2.(\dot{\theta}_{2/0})^2$
- Solide 3 : $E_{c,3/0} = \frac{1}{2}.m_3.(\dot{z}_3)^2$

Question 4 Donner l'expression de l'inertie équivalent I_{eq} ramenée à l'arbre moteur.

$$E_{c,tot/0} = E_{c,1/0} + E_{c,2/0} + E_{c,3/0}$$
$$E_{c,tot/0} = \frac{1}{2}.I_1.(\dot{\theta}_{1/0})^2 + \frac{1}{2}.I_2.(\dot{\theta}_{2/0})^2 + \frac{1}{2}.m_3.(\dot{z}_3)^2$$
$$E_{c,tot/0} = \frac{1}{2}.\left(I_1.\left(\frac{\dot{\theta}_{1/0}}{\dot{\theta}_{1/0}}\right)^2 + I_2.\left(\frac{\dot{\theta}_{2/0}}{\dot{\theta}_{1/0}}\right)^2 + m_3.\left(\frac{\dot{z}_3}{\dot{\theta}_{1/0}}\right)^2\right).(\dot{\theta}_{1/0})^2$$
$$E_{c,tot/0} = \frac{1}{2}.\left(I_1 + I_2.k^2 + m_3.(R_T.k)^2\right).(\dot{\theta}_{1/0})^2$$

On identifie alors l'inertie équivalente:

$$E_{c,tot/0} = \frac{1}{2}.I_{eq}.(\dot{\theta}_{1/0})^2$$
$$I_{eq} = I_1 + I_2.k^2 + m_3.(R_T.k)^2$$

Question 5 Faire un bilan des puissances et déterminer les expressions des différentes puissances mises en jeu.

On isole les solides 1,2 et 3:
On rappelle les formule de calcul de puissance:

$$P_{action \rightarrow solide/referentiel} = \{\mathcal{T}_{action \rightarrow solide}\} \otimes \{\mathcal{V}_{solide/reference}\}$$

Calculs des puissances extérieurs:

- Action du poids sur 1 : $P = 0$ car le solide est en rotation autour de son centre de gravité
- Action du poids sur 2 : $P = 0$ car le solide est en rotation autour de son centre de gravité
- Action du poids sur 3 : $P = -m_3.g.\dot{z}_{3/0}$
- Liaison entre 0 et 1 : $P = 0$ car les liaisons sont parfaites
- Liaison entre 0 et 2 : $P = 0$ car les liaisons sont parfaites

- Couple moteur sur 1 : $P = C_m.\dot{\theta}_{1/0}$

Calculs des puissances intérieurs :

- Liaison entre 1 et 2 : $P = 0$ car les liaisons sont parfaites
- Liaison entre 2 et 3 : $P = 0$ car les liaisons sont parfaites

Question 6 Appliquer le théorème de l'énergie cinétique et déterminer C_m en fonction de $\ddot{\theta}_{1/0}$ et des autres données. Mettre en évidence un couple lié au effet dynamique et un couple statique.

$$\frac{d}{dt}.E_{c,tot/0} = \sum P_{ext} + \sum P_{int}$$

$$I_{eq}.\dot{\theta}_{1/0}.\ddot{\theta}_{1/0} = C_m.\dot{\theta}_{1/0} - m_3.g.\dot{z}_{3/0}$$

En simplifiant les vitesses:

$$I_{eq}.\ddot{\theta}_{1/0} = C_m - m_3.g.R_T.k$$

$$C_m = I_{eq}.\ddot{\theta}_{1/0} + m_3.g.R_T.k$$

On reconnais une partie liée à la dynamique du système (avec le terme en $\ddot{\theta}_{1/0}$) et un couple résistant statique dans l'expression du couple moteur.

Question 7 Tracer l'évolution du couple C_m en fonction du temps si $\dot{z}_{3/0}$ suit une loi en trapèze comme suit.

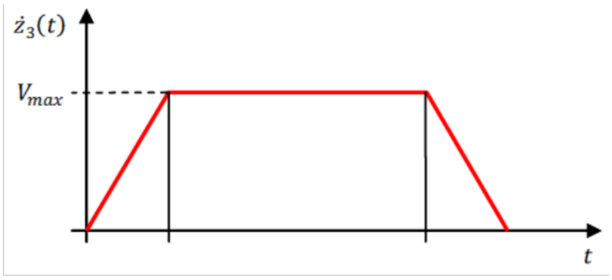

Figure 2: Schéma cinématique du treuil.