



Objectif : L'objectif de ce cours est de poser des modèles sur la déformation des solides. On se limitera au cadre des solides élancés (poutres) et à des chargements de traction-compression et de flexion.

1 Comportement des matériaux

Lorsque soumis à des efforts, les matériaux (contrairement ce qu'étudier dans les premiers cours de l'année) se déforment.

1.1 Homogénéité

Les solides étudiés seront dit **homogènes**, c'est à dire que les propriétés mécanique du solide ne varie pas dans le volume de ce solide. Un solide dont les propriétés change dans le volume est dit **hétérogène**.



Figure 1: Exemple de solide hétérogène et homogène.

1.2 Isotropie

Les solides étudiés seront dit **isotropes**, c'est à dire que leurs caractéristiques mécaniques sont les mêmes dans toutes les directions. Dans le cas contraire on parle de solides **anisotropes**. Pour bien comprendre cette notion il est possible de tester en tentant de tirer sur un ballon en caoutchouc et sur un vêtement en fibre.

1.3 Déformation d'une éprouvette

Pour modéliser un matériau, on réalise des essais sur des éprouvettes (longue et fine tige homogène) que l'on vient analyser. Un essai commun est l'essai en traction : on vient tirer sur l'éprouvette et on trace l'effort que l'on doit fournir pour déformer l'éprouvette en fonction de la longueur que l'on lui force à avoir:



Figure 2: Machine à essai de traction.

La courbe obtenue est en général de la forme:

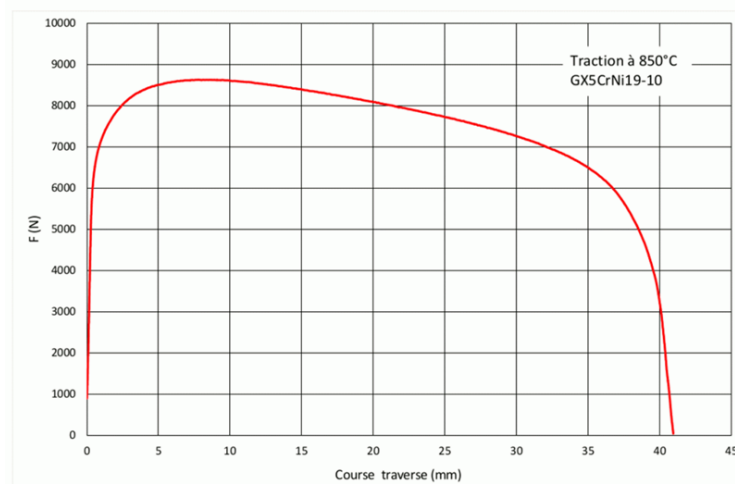


Figure 3: Résultat d'essai de traction brut.

L'analyse au sens du matériau demande à avoir des quantités locales:

- On substitue la contrainte σ à la force F , la contrainte est l'effort local (équivalent à une pression) qui s'applique dans le matériau. En prenant une hypothèse (très raisonnable) de contrainte constante dans l'éprouvette, on obtient:

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

- On substitue la déformation ϵ (sans unité ou en mm/m) à la course. La déformation représente l'élongation de chaque longueur de matière, ne considérant une élongation constante dans toute l'éprouvette (hypothèse très raisonnable), on obtient :

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

La courbe réel du comportement en traction devient alors:

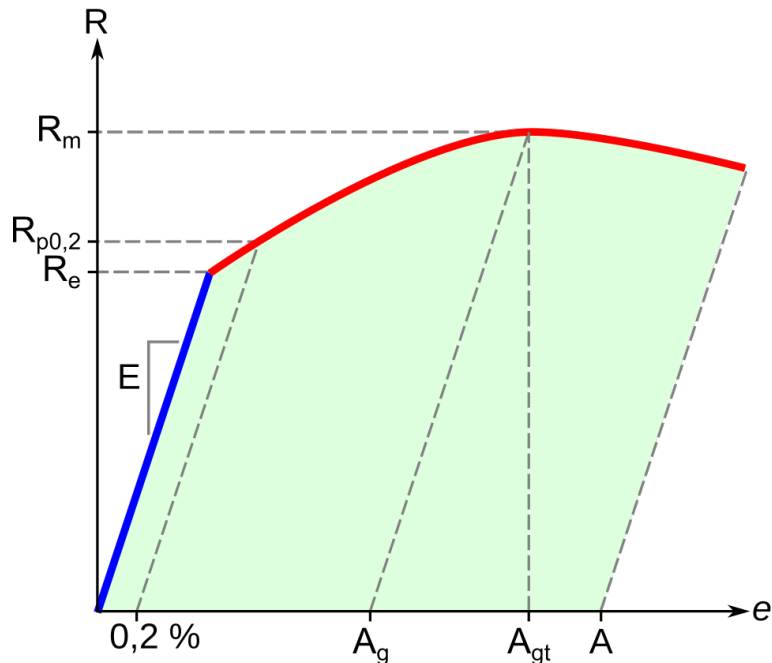


Figure 4: Résultat d'essai de traction traitée.

On remarque deux comportements distincts:

- Dans un premier temps la contrainte σ et la déformation ϵ sont proportionnelles:

$$\sigma = E.\epsilon$$

Avec E un coefficient nommé **module de Young**. On nomme ce comportement l'élasticité linéaire d'un matériau, il est valable jusqu'à une valeur de contrainte qu'on nomme R_e la résistance élastique. Si on relâche le chargement alors le matériau revient à son état d'origine sans déformation résiduelle.

- Dans un second temps on perd l'élasticité et on commence à déformer la matière de manière permanente. Le matériau durcit alors jusqu'à atteindre un chargement maximal nommé R_m . Si on relâche le chargement on revient avec une courbe linéaire jusqu'à un chargement nul, à la recharge on repartira sur un comportement d'élasticité linéaire jusqu'à revenir à la courbe précédente. On appelle ce comportement le comportement plastique du matériau.

Le comportement plastique permet d'augmenter la résistance élastique d'un matériau.

L'étude des problèmes de résistance des matériaux sera souvent de trouver le chargement maximal permettant de ne pas dépasser la limite élastique.

2 Description d'une poutre

Lors de ce cours nous n'allons pas voir le comportement des solides déformables en général, nous nous limiterons aux problèmes de solides élancés aussi nommé **poutres**.

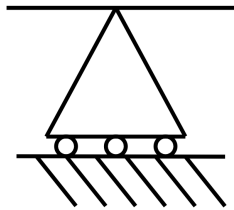
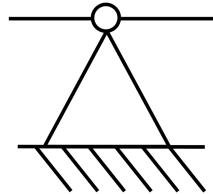
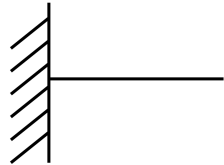
2.1 Notion de poutre

On appelle poutre un solide dont une des grandeurs géométriques est grande devant les autres. On le définit généralement par une **fibre moyenne** aussi appelée **fibre neutre** autour de laquelle on trouve une **section droite** c'est à dire une surface plane définissant la coupe de notre poutre en un point de notre fibre neutre. La fibre neutre passe par le centre de gravité de chacune des section droite de la poutre qui doivent être perpendiculaire à la fibre.

Dans notre cours, nous nous limiterons aux poutres à fibre neutre rectiligne de direction \vec{x} et à section droite avec des formes simples (carré, ronde ou en forme de H). On notera u le déplacement selon l'axe \vec{x} et v le déplacement selon l'axe \vec{y} . Pour assurer une non cassure de la poutre on doit assurer que $v(x)$ soit une fonction C_1 et $u(x)$ soit une fonction C_0 .

2.2 Conditions aux limites

Une poutre ne flotte pas dans le vide on la contraint en déplacement dans certains cas. On différencie trois type de conditions aux limites avec les équations cinématiques associés:

Type de conditions aux limites	Condition cinématiques associées	Représentation schématique
Appui simple	$v = 0$	
Rotule	$\begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases}$	
Encastrement	$\begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \\ \frac{dv}{dt} = 0 \end{cases}$	

2.3 Déformation

Notre poutre est déformable, avec les différents chargements elle va se déformer. Nous allons rester dans le cadre des petites perturbations (et donc des petits déplacements).

- Hypothèses de Bernoulli**

Les sections droites restent droites et perpendiculaire à la fibre moyenne.

Ces hypothèses nous permet de définir la rotation d'une section et la relier au déplacement.

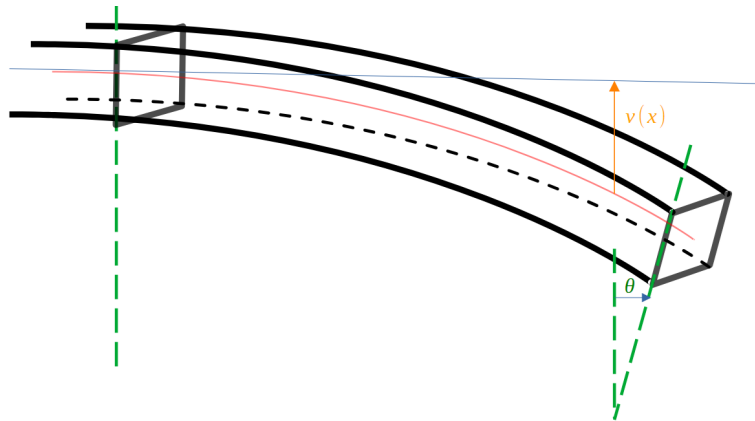


Figure 5: Schéma d'une poutre carrée en flexion.

Ce schéma permet de bien définir le déplacement de la ligne moyenne et sa rotation. La rotation de la ligne moyenne :

$$\theta = \frac{dv(x)}{dx}$$

3 Efforts internes

Les efforts ne s'appliquent pas qu'en un point de la poutre, ils transitent partout dans le solide et chaque point du solide subit des actions mécaniques internes.

3.1 Torseur de cohésion

Prenons une poutre encastree sur laquelle on applique une action mécanique quelconque:

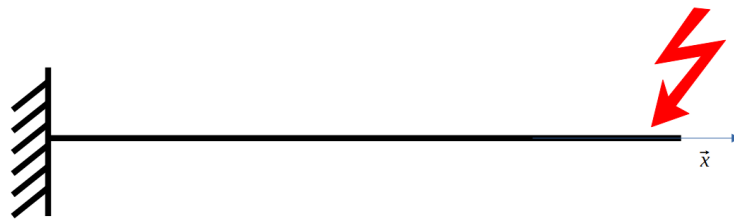


Figure 6: Schéma du problème.

On isole la poutre, le BAME donne:

- Action mécanique appliquée : $\{\mathcal{T}_{AM \rightarrow poutre}\}$
- Liaison encastrement : $\{\mathcal{T}_{Bati \rightarrow poutre}\}$

Le PFS donne:

$$\{\mathcal{T}_{Bati \rightarrow poutre}\} + \{\mathcal{T}_{AM \rightarrow poutre}\} = \{0\}$$

On trouve alors les efforts du bâti:

$$\{\mathcal{T}_{Bati \rightarrow poutre}\} = -\{\mathcal{T}_{AM \rightarrow poutre}\}$$

Maintenant isolons une partie seulement de la poutre, pour cela on imagine une coupure à la distance x de l'encastrement.

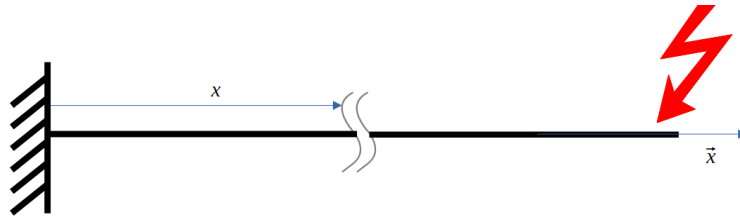


Figure 7: Schéma du tronçon.

On isole la partie de gauche et on effectue le BAME:

- Liaison encastrement : $\{\mathcal{T}_{Bati \rightarrow partie\ gauche}\}$
- Action partie droite de la poutre : $\{\mathcal{T}_{partie\ droite \rightarrow partie\ gauche}\}$

On met alors en évidence que la poutre agit sur elle même, on nomme torseur de cohésion $\{\mathcal{T}_{cohésion}\}$ l'action mécanique $\{\mathcal{T}_{partie\ droite \rightarrow partie\ gauche}\}$ (on notera bien toujours la partie droite sur gauche et non pas l'inverse pour garder les bons signes).

• Définition du torseur de cohésion

$$\{\mathcal{T}_{cohésion}\} = \{\mathcal{T}_{partie\ droite \rightarrow partie\ gauche}\}$$

Ce torseur dépend des effort extérieurs mais aussi de la distance de la coupure.

$$\{\mathcal{T}_{cohésion}\}_K = \left\{ \begin{array}{cc} F_{compression} & M_{torsion} \\ F_{cisaillement,y} & M_{flexion,y} \\ F_{cisaillement,z} & M_{flexion,z} \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Avec :

- $F_{compression}$ l'effort de compression de la poutre en K .
- $F_{cisaillement}$ les efforts de cisaillement en K , ces efforts ne seront pas étudié dans ce cour.
- $M_{torsion}$ le moment de torsion de la poutre en K . La torsion ne sera pas étudiée dans ce cour.
- $M_{flexion}$ le moment de flexion de la poutre en K .
- K est le point d'observation de la coupure.

Ces efforts permettent de trouver les différentes déformations et donc de remonter aux déplacement le long de la poutre. Une hypothèse classique en mécanique des poutres est l'hypothèse de Saint-Venant:

• Hypothèse de Saint-Venant

Si on se place assez éloigné des points d'application des efforts alors les déformations de la poutre de dépend pas de la façon dont ces efforts sont appliqué et on ne prendra alors en compte que le torseur d'action mécanique global pour la détermination de la déformation

3.2 Traction-Compression

Dans le cadre de la traction compression (au lieu de tirer sur le solide on le pousse), le déplacement se fait dans la direction des efforts.

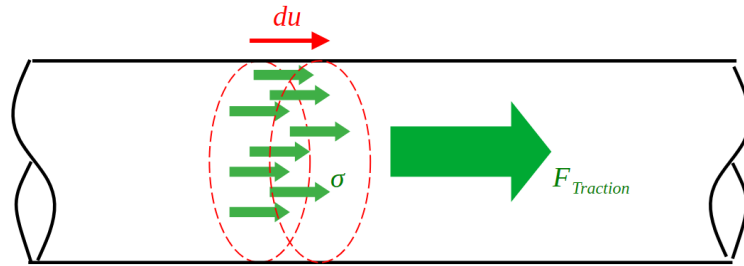


Figure 8: Schéma de la répartition des efforts dans une section sollicitée en traction.

On suppose que les efforts sont homogènes dans la section, dans le domaine de l'élasticité linéaire nous donne que la déformation locale de chaque point est:

$$\epsilon = \frac{du}{dx} = \frac{\sigma}{E}$$

Or on considère une répartition homogène de la contrainte et donc de la déformation on obtient:

• Lien entre effort et déformation dans le cas de traction

Pour une sollicitation en traction par un effort $F_{traction}$:

$$\frac{du}{dx} = \frac{F_{traction}}{S.E}$$

et :

$$\sigma_{traction} = \frac{F_{traction}}{S}$$

Avec :

- E est le module d'Young du matériau.
- $F_{traction}$ est l'effort de traction de la poutre au niveau de la coupure.
- S est la surface locale de la section droite de la poutre.
- $\sigma_{traction}$ est la contrainte locale de traction dans la coupure.
- u est le déplacement totale de la section lors du chargement en traction.

On trouve le déplacement totale de chaque section de la poutre en intégrant et en prenant en compte les conditions aux limites imposés par les différents arrêts comme vu dans la section 2.2.

3.3 Flexion

La sollicitation en flexion est particulière, l'effort créant la flexion est le momen de flexion mais la majorité des chargements en flexion se fait par un effort créant ce moment.

Dans le cadre d'un chargement en flexion, la contrainte se répartie linéaire en s'éloignant de la fibre neutre:

$$\sigma(y) = \frac{\sigma_{max}}{R_{max}} \cdot y$$

Le moment $M_{flexion}$ se calcule en intégrant sur toute la surface le moment créé par chaque élément de la surface:

$$M_{flexion} = \int_S \sigma(y) \cdot y \cdot dS = \frac{\sigma_{max}}{R_{max}} \cdot \int_S y^2 \cdot dS$$

La quantité $I_z = \int_S y^2 \cdot dS$ est appelé moment quadratique sur z de la section et représente la difficulté à déformer la section.

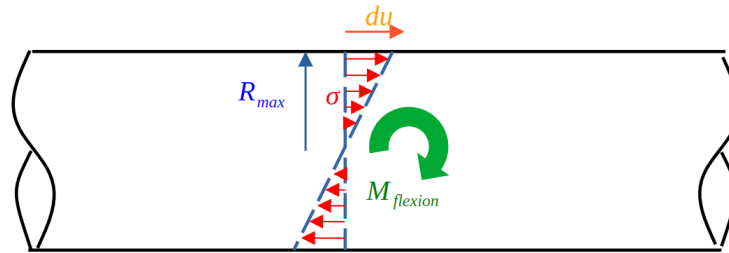


Figure 9: Schéma de la répartition des efforts dans une section sollicitée en flexion.

En imposant un moment on impose une rotation de la section $\frac{d\theta}{dx}$ pour calculer cette déformation on regarde la variation d'angle:

$$d\theta = \frac{du}{R_{max}}$$

Or nous sommes dans le cadre de l'élasticité linéaire:

$$\frac{du}{dx} = \epsilon = \frac{\sigma_{max}}{E}$$

Et donc :

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\sigma_{max}}{E \cdot R_{max}}$$

On obtient donc:

• Lien entre effort et déformation dans le cas de flexion

Pour une sollicitation en flexion par un effort $M_{flexion}$:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M_{flexion}}{E \cdot I_z}$$

et :

$$\sigma_{flexion} = \frac{M_{flexion}}{I_z} \cdot y \Rightarrow \sigma_{flexion,max} = \frac{M_{flexion}}{I_z} \cdot R_{max}$$

Avec:

- E est le module d'Young du matériau.
- I_z est le moment quadratique local sur \vec{z} de la section droite de la poutre.
- v est le déplacement en flexion de la poutre.
- θ est la rotation de la section de la poutre au niveau de la coupure.
- R_{max} est l'éloignement maximale de la poutre à la fibre neutre sur l'axe \vec{y} .
- $M_{flexion}$ est le moment de flexion de la poutre au niveau de la coupure.
- $\sigma_{flexion}$ est la contrainte locale de flexion dans la coupure.

Le calcul de la déformée de la fibre moyenne de la poutre en prenant en compte les différentes conditions aux limites telles que définies dans la section 2.2.

3.4 Théorème de superposition

Dans le cadre de l'élasticité linéaire il est possible de trouver la résolution d'un problème avec des sollicitations composées en décomposant les sollicitations : Dans le cadre d'une sollicitation en flexion traction, on étudie séparément la traction et la flexion avant d'additionner les résultats pour trouver les déformations globale (et dans ce cas précis en dessinant les contraintes on remarque qu'elles sont dirigées dans les mêmes directions donc on peut les additionner.)

4 Résolution d'un problème de résistance des matériaux

Une méthode pour résoudre les problème de mécanique des poutres est:

4.1 Poser le problème poutre

On commence par définir la poutre étudiée, sa section, sa fibre moyenne et les appuis donnant les conditions aux limites. Puis on définit le chargement et on déduit le type de contrainte on va avoir à faire. Dans les cas de flexion ou de torsion, on peut déjà calculer les moments quadratiques qui seront utiles pour la suite.

4.2 Trouver les efforts internes

En posant les coupures aux différentes positions le long de la poutre, on détermine le torseur de cohésion grâce au PFS. La détermination de ce torseur de cohésion permet de déterminer le type de sollicitation réelle que voit la poutre.

4.3 Trouver les déformations et les déplacements

On utilise les modèles de comportement connues pour déterminer les déformations locales de la poutre. A l'aide des conditions aux limites, on intègre les déformations pour trouver les déplacements totaux de la poutre. On recommence ce processus pour chaque sollicitations.

4.4 Trouver les contraintes maximales

Pour trouver les contraintes maximales, on étudie chaque sollicitation et on calcule le champs de contrainte et on les additionne. Une fois le champs de contrainte total obtenu on en cherche le maximum et on obtient alors la valeur maximale de la contrainte qui sera importante pour le dimensionnement de la poutre.