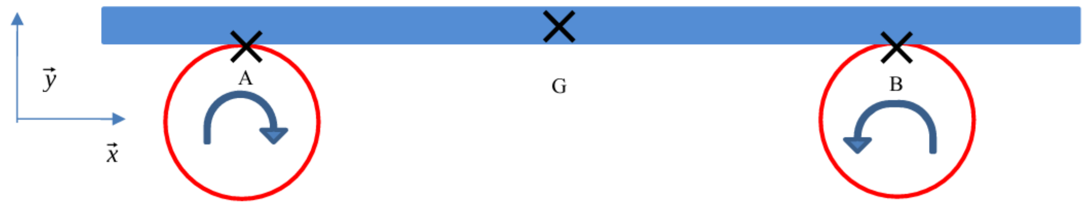
	Colle – Equation différentiel en dynamique	2026

1 Introduction

Une expérience permettant de déterminer le coefficient de frottement (pas d'adhérence) entre deux solides est une barre oscillante sur deux roues.

2 Présentation du système



Hypothèses:

- Les contacts en A et en B sont frottant et de coefficient de frottement f inconnu.
- Les deux roues tournent à grande vitesse. Les contacts en A et B sont donc en frottement et pas en adhérence.
- La barre est de masse M connue.
- La longueur de la barre est grande devant L. La barre ne tombera pas lors de son mouvement.

Données géométrique:

- $\overrightarrow{AG} = x_1.\overrightarrow{x} + h.\overrightarrow{y}$
- $\overrightarrow{AB} = L.\overrightarrow{x}$

Question 1 En appliquant le PFD sur la barre, montrez que la position x_1 de la barre est définit par une équation différentielle.

On isole la barre:

Le torseur dynamique est :

$$\{\mathcal{D}_{barre/0}\} = {}_G\left\{ \begin{array}{c} M.\ddot{x}_1.\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$$

BAME :

- Pesanteur sur barre : $\{\mathcal{T}_{pes\rightarrow barre}\} = {}_G\left\{ \begin{array}{c} -M.g.\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$
- Contact en A : $\{\mathcal{T}_{RoueA\rightarrow barre}\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} f.Y_A.\overrightarrow{x} + Y_A.\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\} = {}_G\left\{ \begin{array}{c} f.Y_A.\overrightarrow{x} + Y_A.\overrightarrow{y} \\ (f.h - x_1).Y_A.\overrightarrow{z} \end{array} \right\}$
- Contact en B : $\{\mathcal{T}_{RoueB\rightarrow barre}\} = {}_B\left\{ \begin{array}{c} -f.Y_B.\overrightarrow{x} + Y_B.\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\} = {}_G\left\{ \begin{array}{c} f.Y_B.\overrightarrow{x} + Y_B.\overrightarrow{y} \\ (L - x_1 - f.h).Y_B.\overrightarrow{z} \end{array} \right\}$

le PFD donne les équations :

$$\begin{cases} f.Y_A - f.Y_B = M.\ddot{x_1} \\ Y_A + Y_B = M.g \\ (f.h - x_1).Y_A + (L - x_1 - f.h).Y_B = 0 \end{cases}$$

La troisième équation donne :

$$Y_A = \frac{f.h + x_1 - L}{f.h - x_1}.Y_B$$

En remplaçant dans la deuxième équation donne:

$$\frac{f.h + x_1 - L}{f.h - x_1}.Y_B + Y_B = M.g$$

$$Y_B.\left(\frac{f.h + x_1 - L + f.h - x_1}{f.h - x_1}\right) = \left(\frac{2.f.h - L}{f.h - x_1}\right) = M.g$$

$$Y_B = M.g.\left(\frac{f.h - x_1}{2.f.h - L}\right)$$

On en déduit alors :

$$Y_A = M.g.\left(\frac{f.h - L + x_1}{2.f.h - L}\right)$$

La première équation devient alors:

$$M.g.\left(\frac{f.h - L + x_1}{2.f.h - L}\right) - M.g.\left(\frac{f.h - x_1}{2.f.h - L}\right) = M.\ddot{x_1}$$

$$g.(f.h - L + x_1) - g.(f.h - x_1) = \ddot{x_1}.(2.f.h - L)$$

$$\frac{2.g}{2.f.h - L}.x_1 - \frac{g.L}{2.f.h - L} = \ddot{x_1}$$

$$\ddot{x_1} - \frac{2.g}{2.f.h - L}.x_1 = \frac{g.L}{2.f.h - L}$$

Question 2 En résolvant cette équation trouvez la position d'équilibre permettant d'obtenir une barre immobile.

L'équation admet comme solution :

$$x_1(t) = \frac{L}{2}$$

Question 3 Dans le cas où la barre est en mouvement, déterminer f en fonction de la période T de l'oscillation de la barre qu'il est possible de mesurer.

L'équation est de la forme :

$$\ddot{x_1} + \omega_0^2.x_1 = \frac{g.L}{2.f.h - L}$$

Avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{2.g}{L - 2.f.h}}$

La solution de ce genre d'équation différentielle est :

$$x_1(t) = A.cos(\omega_0.t + \varphi) + \frac{L}{2}$$

La période T de la solution est $T = \frac{2.\pi}{\omega_0} = \sqrt{\frac{2.\pi^2(L - 2.f.h)}{g}}$

On isole f:

$$f = \frac{L - \frac{g.T^2}{2.\pi^2}}{2.h}$$