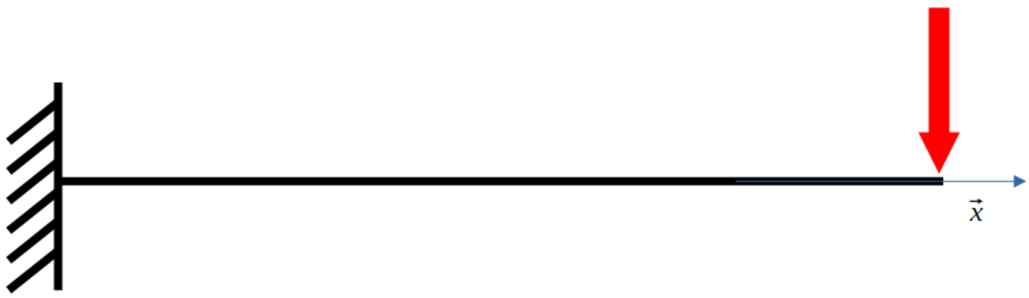
1 Présentation du problème

On étudie une poutre en chargement simple de flexion:



Les données sont :

- La poutre est composé d'un matériaux isotrope, homogène et élastique.
- On considère que les hypothèses de Bernoulli et de Saint Venant sont respectées.
- On note E le module d'Young du matériau.
- La géométrie de la poutre donne I le moment quadratique autour de l'axe z de la poutre. Cette géométrie est constante le long de la poutre.
- La poutre est en liaison encastrement avec un bâti fixe **0** au point **O**.
- Le chargement de la poutre se fait à une distance L de l'encastrement.
- La poutre est de longueur L.
- Le chargement est connu :

$$\{\mathcal{T}_{chargement \to poutre}\} = {}_{A}\left\{ \begin{array}{c} -F.\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$$

- On notera $u(x)$ le déplacement vertical de la poutre.
- Le poids de la poutre sera négligé dans cette étude.

2 Travail à réaliser

Question 1 En isolant la poutre, exprimer les efforts transmis par la liaison encastrement en O.

On isole la poutre:
BAME:

- Effort en A :

$$\{\mathcal{T}_{chargement \to poutre}\} = {}_{A}\left\{ \begin{array}{c} -F.\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\} = {}_{O}\left\{ \begin{array}{c} -F.\overrightarrow{y} \\ -F.L.\overrightarrow{z} \end{array} \right\}$$

- Encastrement en O :

$$\{\mathcal{T}_{0 \to poutre}\} = {}_{O}\left\{ \begin{array}{c} X.\overrightarrow{x} + Y.\overrightarrow{y} + Z.\overrightarrow{z} \\ L.\overrightarrow{x} + M.\overrightarrow{y} + N.\overrightarrow{z} \end{array} \right\}$$

On applique le PFS on obtient :

$$\{\mathcal{T}_{chargement \to poutre}\} + \{\mathcal{T}_{0 \to poutre}\} = \{0\}$$

On obtient :

$$\{\mathcal{T}_{0 \to poutre}\} = {}_{O}\left\{ \begin{array}{c} F.\overrightarrow{y} \\ F.L.\overrightarrow{z} \end{array} \right\}$$

Question 2 Par la méthode des coupures, déterminez le torseur de cohésion. Déterminez le moment fléchissant en fonction de la distance x au point O.

On fait une coupure au point K :
On isole le troncon de gauche:
BAME

- Effort en A : $\{\mathcal{T}_{cohesion \to poutre}\}$
- Encastrement en O : $\{\mathcal{T}_{0 \to poutre}\} = {}_{O}\left\{ \begin{array}{c} F.\overrightarrow{y} \\ F.L.\overrightarrow{z} \end{array} \right\} = {}_{K}\left\{ \begin{array}{c} F.\overrightarrow{y} \\ F.(L-x).\overrightarrow{z} \end{array} \right\}$

Le PFS donne :

$$\{\mathcal{T}_{cohesion \to poutre}\} + \{\mathcal{T}_{0 \to poutre}\} = \{0\}$$

On obtient :

$$\{\mathcal{T}_{cohesion \to poutre}\} = {}_{K}\left\{ \begin{array}{c} F.\overrightarrow{y} \\ F.(L-x).\overrightarrow{z} \end{array} \right\}$$

on en déduit:

$$M_{flexion,z} = F.(L-x)$$

Question 3 Déterminez le déplacement de la poutre subissant l'effort F.

Le comportement en flexion donne:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{M_{flexion,z}}{I.E} = \frac{F}{I.E}.(L-x)$$

On intègre une fois :

$$\frac{du}{dx} = \frac{F}{I.E}.\left(L.x - \frac{x^2}{2} + A\right)$$

On intègre une deuxième fois :

$$u(x) = \frac{F}{I.E}.\left(L.\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + A.x + B\right)$$

L'encastrement impose les déplacements suivants :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{du}{dx}(x=0) & = & 0 \\ u(x=0) & = & 0 \end{array} \right.$$

On en déduit $A = B = 0$

$$u(x) = \frac{F}{I.E}.\left(L.\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

Question 4 Déterminez la flèche (déplacement maximale de la poutre).

On calcule le déplacement en $x = L$:

$$u_{max} = \frac{F.L^3}{3.I.E}$$

Question 5 On donne l'écart maximal R_{max} d'un point solide de la poutre par rapport à sa fibre neutre. Déterminez la contrainte maximale développée dans la poutre.

La répartition de la contrainte s'écrit:

$$\sigma = \frac{M_{flexion,z}}{I}.y$$

Donc au maximum :

$$\sigma_{max} = \frac{M_{flexion,z}}{I}.R_{max}$$